高中数学竞赛解题方法研究

冷岗松　著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是作者多年组织数学竞赛辅导中积累的经验总结，对中学生解竞赛题的思维方式、解题方法及技巧作了详细的讲解，并用大量典型例题的分析，侧重讲述解数学竞赛题的思维活动过程。书中讲述了大量国内外典型竞赛题的解法，可使高中学生从中学习如何解竞赛题，提高解题的能力。

此书可作为高中数学竞赛的辅导教材，也可供各中学数学教师、师范院校师生及数学竞赛的辅导员参考。

(京)新登字 158 号

高中数学竞赛解题方法研究
冷岗松 著
责任编辑 尹芳平
☆
清华大学出版社出版
北京 清华园
清华大学印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
☆
开本：787×1092 1/32 印张：12 字数：257 千字
1993 年 10 月第一版 1993 年 10 月第 1 次印刷
印数：00001—10000
ISBN 7-302-01323-3/O·145
定价：8.50 元

前　　言

奥林匹克数学是以竞赛为标记，以"问题和解"为形式的数学，是将现代数学的深刻思想与初等数学的精妙技巧相结合的"中间数学"，是一种富有教育功能的"有用数学"，是富有挑战性的"活数学"。因此，奥林匹克数学空前繁荣。数学奥林匹克活动正在广大的范围内深入地发展。

面对成千上万、千姿百态的数学竞赛试题，"怎样解题"一直是广大中学师生最为关心的问题。本书有别于以内容划分专题的各类竞赛教程，通过大量实例的分析，侧重讲述解数学竞赛题的思维活动过程。

全书共分四章。第 1 章阐述解数学竞赛题的思维方式；第 2 章论及数学竞赛中的基本解题方法；第 3 章总结了解答各类典型问题的方法和技巧；篇幅较短的第 4 章主要适用于教练员和教师，提出了数学竞赛的若干命题策略。全书适合广大高中师生，师范院校数学系学生阅读。

本书是作者在数学竞赛的教练和教学工作中发展起来的，并从众多的竞赛书刊中吸收了大量营养。但囿于作者的学识和水平，书中的错漏之处在所难免，祈盼读者不吝指正，以便有机会再版时修改。

张硂教授审阅了全书并提出了宝贵的修改意见，在此致谢。

冷岗松

1993 年 3 月于长沙

目　　录

第 1 章　数学竞赛中的解题思维方式

数学问题的形式千变万化, 结构错综复杂, 特别是一些难度较大的国内外竞赛题, 不仅题目新颖, 知识覆盖面大, 而且背景深刻, 技巧性强, 个别问题的解, 独到别致。因此, 与解常规数学题(被简单化和舞台化了)相比, 解竞赛题要求解题者有良好的数学素质, 即不仅要掌握一些必备的基础知识, 而且要求有正确的解题思维方式。本章介绍数学竞赛中一些常用的解题思维方式, 并通过若干典型例题的分析和讨论加以具体说明。

1.1　观察特征

观察问题的特征, 抓住与解题有关的种种信息(有些还是十分隐蔽的信息), 是解题获得成功的首要条件。

所谓观察特征, 就是要运用已有的知识和经验, 对问题的条件和结论的外形结构特点, 数值特点, 差异特点, 图形的形状、位置特点等等, 进行仔细的观察、分析和联想。

[**例** 1-1]　**设** $25\cos A+5\sin B+\operatorname{tg}C=0$, $\sin^2 B-4\cos A\cdot\operatorname{tg}C=0$, **求证**: $\operatorname{tg}C=25\cos A$。

分析: 第二个已知等式左边的外形结构与一元二次方程的判别式相似, 由此我们考虑方程 $x^2\cos A+x\sin B+\operatorname{tg}C=0$。

这个方程有什么特点呢?对照条件观察易知它有相等的实根,且5是它的一个根。到了这里,解题的思路就十分清楚了。

证明:当 $\cos A=0$ 时,易知 $\operatorname{tg}C=0$,命题成立。

当 $\cos A\neq 0$ 时,考虑一元二次方程

$$x^2\cos A+x\sin B+\operatorname{tg}C=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

由第一个条件知 $x=5$ 是方程(1-1-1)的根。由第二个条件知方程(1-1-1)有相等的实数根,于是 $x_1x_2=25$,又由韦达定理知 $x_1x_2=\dfrac{\operatorname{tg}C}{\cos A}$,故得 $\operatorname{tg}C/\cos A=25$,这就是所要证的。

[例1-2]　(1987年上海市竞赛试题)设 f 是(0, 1)区间上的实函数,如果

(1) $f(x)>0$,对任何 $x\in(0,1)$

(2) $\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(1-x)}{f(1-y)}\le 2$,对任何 $x,y\in(0,1)$　证明:f 必定是常数函数。

分析:要证 f 是常数函数,只要证对任何的 $x,y\in(0,1)$ 恒有 $f(x)=f(y)$。要由不等形式的条件(2)出发证明等量关系,启发我们寻找一对反向的不等式(由 $A\le B$, $A\ge B$　$A=B$)。

观察条件(2)知 x, y 换位后仍成立。也就是有 $\dfrac{f(y)}{f(x)}+\dfrac{f(1-y)}{f(1-x)}\le 2$,这也是一个潜在的条件!对比观察一下这个条件和条件(2)的外形结构特征使我们不禁想起代数中熟悉的不等式:$a,b>0$, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 2$(等号仅当 $a=b$ 时成立)。由此出发,问题就变得十分容易了。

证明:由于 $f(x)>0$, $f(y)>0$, $f(1-x)>0$, $f(1-y)>$

0, 所以

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\geq 2,\quad \frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\geq 2,$$

于是

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\geq 4. \tag{1-2-1}$$

又由条件$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}\leq 2$ 知$\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\leq 2$

从而有

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\leq 4. \tag{1-2-2}$$

比较(1-2-2)和(1-2-1)两式, 当且仅当 $f(x)=f(y)$, $f(1-x)=f(1-y)$时成立, 所以 $f(x)\equiv$常数。

[例 1-3] (第 24 届前苏联奥林匹克试题) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正数, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, 证明:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}. \tag{1-3-1}$$

分析: 观察不等式(1-3-1)左边每一分式的特点: 分子的次数为 2, 分母的次数为 1。这易使我们想起柯西不等式, 因为根据通常的解题经验, 用柯西不等式处理这类分式型的不等式是十分有效的。

证明: 由柯西不等式得:

不等式(1-3-1)的左边=

$\frac{1}{2}[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1)]\cdot$

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots$$

$+a_n)^2=\frac{1}{2}$, 得证。

注: 用例 1-3 的方法还可证明 1984 年全国联赛试题:“设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数, 求证: $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geq x_1+x_2+\cdots+x_n$。”

不少数学问题中, 常出现某些特殊的“数值”, 分析这些数值的特征, 顺藤摸瓜, 往往可获得解题思路。

[例 1-4] (第二届中国冬令营试题)

(1) 设三个正数 a, b, c 满足不等式

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$$

求证 a, b, c 一定是某个三角形的三条边长;

(2) 设 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)\quad (n\geq 3)$$

求证这些数中的任何三个一定是某个三角形的三边之长。

分析: (1) 较易, 从略。要证(2), 就是要从(2)中的已知不等式推出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的任意三个数, 不妨设为 a_1, a_2, a_3, 满足(1)中的不等式便可。也就是要利用(2)中的已知不等式证明

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4).$$

这个不等式等价于

$$(n-1)\quad 2\quad \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}^{\;2}+a_4^4+\cdots+a_n^4$$

$$>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)\qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

要证(1-4-1), 由(2)中的不等式知如能证明

$$(n-1)\quad 2\quad \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}^{\;2}+a_4^4+\cdots+a_n^4$$

$$> (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

便可。要证(1-4-2), 注意到“$n-1$”这一数值特征, 考虑将 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 分组成 $n-1$ 项用柯西不等式; 又考虑到(1-4-2)左边的结构特点, 这 $n-1$ 项应为 $\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}, \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}, a_4^2, \cdots, a_n^2$ 比较适宜, 至此思路便豁然开朗了。

证明: 由(1)不难验证

$$(a^2+b^2+c^2) - 2(a^4+b^4+c^4)$$
$$= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)\cdot(a+b-c)$$

于是

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) > 0 \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

若(1-4-3)式的左边有一个因式小于零, 另两个因式必大于零, 从而它们三者的乘积小于零, 矛盾。故(1-4-3)式左边的三个因式都为正, 于是 a, b, c 构成一个三角形的三边。

(2) 由对称性, 不妨证明 a_1, a_2, a_3 是某一个三角形的三边便可。这时, 由柯西不等式可得

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2$$
$$= \left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2} + \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2} + a_4^2 + \cdots + a_n^2\right)^2$$
$$\leq \left[\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2 + a_4^4 + \cdots + a_n^4\right]$$
$$\cdot (\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{n-1})$$
$$= (n-1)\left[2\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2 + a_4^4 + \cdots + a_n^4\right]$$

于是由(2)中的不等式便得

$$(n-1)\left[2\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2 + a_4^4 + \cdots + a_n^4\right]$$

$$\geq (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 + \cdots + a_n^4)$$

化简就是$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)$, **再由**(1) **知** a_1, a_2, a_3 **是某一三角形的三边,得证。**

对于几何问题,观察图形的形状特征、位置特征等,是解题成功的关键所在。细致的观察,往往产生妙解。

[**例** 1-5]　**方程** $x^2 - 2x + 2 = 0$ **的两根记作** α, β, **方程** $x^2 + 2px - 1 = 0$ **的两根记作** γ, δ。**如果在复平面上** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ **四点共圆,试确定实数** p **的值。**

分析:本题中最关键的是圆心的位置。为确定其位置先须研究 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ **在复平面上的位置。方程** $x^2 - 2x + 2 = 0$ **的两根是** $\alpha = 1 + i$, $\beta = 1 - i$; **方程** $x^2 + 2px - 1 = 0$ **的两根是** $\gamma = -p + \sqrt{1 + p^2}$, $\delta = -p - \sqrt{1 + p^2}$。**注意到** α, β **关于实轴对称,因此圆心一定位于** α, β **连线的中垂线即实轴上,又** γ, δ **位于实轴,因此圆心一定是** γ, δ **的中点。故圆心的坐标为** $O'(-p, 0)$。**再由** $|O'\alpha| = |O'\gamma|$, **便得** $p = -\dfrac{1}{2}$。**解略。**

[**例** 1-6]　(**第** 13 **届加拿大竞赛试题**) **给定半径为** r **的圆上定点** P **的切线** l, **由此圆上动点** R **引** RQ **垂直于** l, **交** l **于** Q, **试确定** $\triangle PQR$ **面积的最大值**(**见图** 1.1)。

分析:此题可用解析几何的方法求解。但运算量较大。若注意分析图形的特征,则可得十分简便的解法。如图 1.1, **注意到** $OP \parallel RQ$ **这一特点,于是作** $RS \parallel l$ **交圆周于** S,

图　1.1

这样易见△PRS 的面积为△PQR 面积的两倍(前者包含与后者全等的两个三角形)。又因为圆内接三角形 PRS 当其为正三角形时面积最大,最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$,从而△PQR 的最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$。解略。

有时,动态地观察和分析图形的特征,易发现解题思路。

[例 1-7] (第 29 届 IMO 试题)已知两同心圆的圆心为 O(如图 1. 2),过小圆上一定点 M 作小圆的弦 MA 和大圆的弦 BMC,且使 MA⊥BC,求证:$AB^2+BC^2+CA^2$ 为定值。

分析:进行动态的观察与分析,见图 1. 2,令 A 沿着小圆周向着极限位置 M 点运动,当 M 与 A 重合时,则过 M 点的弦的方向变为过 M 点的切线方向。此时,由条件 MA⊥BC 知 BC 变为过圆心 O 的直径 B_1C_1,AB 变为 MB_1,AC 变为 MC_1。设大圆和小圆的半径分别为 R,r,则此时

$$
\begin{aligned}
AB^2+BC^2+AC^2 &= MB_1^2+B_1C_1^2+MC_1^2\\
&=(R-r)^2+(2R)^2+(R+r)^2\\
&=6R^2+2r^2.
\end{aligned}
$$

这样,我们发现了问题的结论。由于结论中的定值为平方和的形式,启发我们用勾股定理证之。

图 1. 2　　　　　　图 1. 3

证明: 如图 1. 3, 作平行于 AM 的直径 EF, 与 BC 相交于 Q, 设 $AM=2y$, 则 $OQ=y$, 则有

$$BC^2=(2BQ)^2=4(OB^2-OQ^2)=4(R^2-y^2) \quad (1\text{-}7\text{-}1)$$

$$AB^2=BM^2+(2y)^2 \quad (1\text{-}7\text{-}2)$$

$$AC^2=MC^2+(2y)^2 \quad (1\text{-}7\text{-}3)$$

又

$$\begin{aligned} BC^2 &= (BM+MC)^2=BM^2+MC^2+2BM \cdot MC \\ &= BM^2+MC^2+2(B_1M \cdot MC_1) \\ &= BM^2+MC^2+2(R-r)(R+r) \quad (1\text{-}7\text{-}4) \end{aligned}$$

由(1-7-1)～(1-7-4)立即得证。

观察差异特征, 常可帮助我们发现解题方向。

[**例** 1-8] (1988 年列宁格勒竞赛试题) 设 a, b, c, d 为正实数, 证明:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}. \quad (1\text{-}8\text{-}1)$$

分析: 观察不等式(1-8-1)中的变元, 易见他们的地位存在着差异。因此在运用基本不等式时必须消除这种差异, 否则得不到精确的下界。注意到 $a=b=1, c=2, d=4$ 时等号成立, 因此为消除差异, 在变形分组运用基本不等式时, 让 a, b 对等配组, 2a 与 c, 2b 与 c, 4a 与 d, 4b 与 d 分别等同配组, 于是经过探索便可发现下面的证法。

证明: 因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{1b}{d}(a+b+c+d)$

$$\begin{aligned} &= 22+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\frac{2a}{c}+\frac{c}{2a}+4\frac{4a}{d}+\frac{d}{4a} \\ &+2\frac{2b}{c}+\frac{c}{2b}+4\frac{4b}{d}+\frac{d}{4b}+8\frac{2c}{d}+\frac{d}{2c} \end{aligned}$$

由于 $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2(\alpha>0)$, 故上述括号内之值均不小于 2, 于是便

得

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)\geq 64.$$

这就是不等式(1-8-1),得证。

观察和挖掘一些隐藏的特征,对于突破问题的难点有十分重要的作用。

[例 1-9] (1992 年湖南省竞赛试题)若 A, B, C 成等差数列,试求直线 $Ax+By+C=0$ 与抛物线 $y=-2x^2$ 相交弦的中点的轨迹方程。

分析:此题虽然为一常规的解析几何题,但弄得不好,所设变元一多,则相当繁杂。若注意到问题的两个隐含特征:(1)对任何的 A, B, C, 直线 $Ax+By+C=0$ 总通过定点 $P_0(1,-2)$(这是因为 $A-2B+C=0$);(2) $P_0(1,-2)$ 还在抛物线 $y=-2x^2$ 上,则问题变得十分简便。

解:由 A, B, C 成等差数列知 $A-2B+C=0$,这说明直线 $Ax+By+C=0$ 总过定点 $P_0(1,-2)$,又 P_0 在抛物线上,因此 P_0 为直线与抛物线的一个交点。设它们的另一交点为 $P_1(x_1, y_1)$,它们相交弦的中点为 $P(x,y)$,则

$$x=\frac{x_1+1}{2}, y=\frac{y_1-2}{2}$$

也就是 $x_1=2x-1$, $y_1=2y+2$,又 $P_1(x_1,y_1)$ 在抛物线上,于是有 $2y+2=-2(2x-1)^2$,即 $y+1=-(2x-1)^2$,这就是点 P 的轨迹方程。

从上面一些例子可看出,要观察到问题的特征,并非轻而易举之事,这里必须有数学知识上的娴熟,思维上的灵巧以及锲而不舍的精神。

值得指出，观察特征具有非常广泛的含义，如变换观察角度，意味着变更问题；观察问题的简单情形，意味着特殊化。这些较具体的观察思维方式，本章将予以专门介绍。

1.2 特殊化与一般化

由于一般性寓于特殊性之中，对于一个复杂的问题，如果从一般角度解题有困难，那么我们就可以通过考察和研究它的特殊情况，寻求和发现一般规律及方法。这种从特殊入手解决问题的思考方式，通常称为“特殊化”。

特殊化是一种以屈求伸、欲进先退的思维方法。在数学解题和数学研究中经常用到。我国著名数学家华罗庚先生就曾经指出：“善于‘退’，足够地‘退’，‘退’到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！”

通过特殊化，可探索出问题的正确结论。

[例 1-10] 设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项分别为 $a_n=2^n$，$b_n=3n+2$，它们的公共项由小到大排列成数列$\{c_n\}$，求$\{c_n\}$的前 n 项和。

分析：由$\{b_n\}$的通项公式知，凡属$\{b_n\}$的项，以 3 除必余 2，根据这一原则观察$\{a_n\}$中的前面一些项 2，4，<u>8</u>，16，<u>32</u>，64，<u>128</u>，256，<u>512</u>，知底下加横线的项也是$\{b_n\}$的项，因此属于$\{c_n\}$，于是$\{c_n\}$的前四项为 8，32，128，512。由此我们猜测$\{c_n\}$的项为$\{a_n\}$的第三项起的所有奇数项，构成一个首项为 8，公比为 4 的等比数列。通过分析特殊情况，我们明确了$\{c_n\}$的结构，从而知道了问题的结论，剩下的是严格证明的任务了。

解：易见 $c_1=8$，设$\{a_n\}$的第 m 项与$\{b_n\}$的第 k 项相等，并

设这是$\{c_n\}$的第 n 项, 即 $c_n = 2^m = 3k + 2$, $\{a_n\}$的第 $m+1$ 项为

$$a_{m+1} = 2^{m+1} = 2 \cdot 2^m = 2(3k+2) = 3(2k+1)+1$$

这不是$\{b_n\}$的项, 而$\{a_n\}$的第 $m+2$ 项为

$$a_{m+2} = 2^{m+2} = 4(3k+2) = 3(4k+2)+2$$

这是$\{b_n\}$的项, 从而是$\{c_n\}$的第 $n+1$ 项, 即 $c_{n+1} = 2^{m+2}$, 故$\{c_n\}$是首项为 8, 公比为 4 的等比数列, 它的前 n 项和为 $S_n = \dfrac{8(2^{2n}-1)}{3}$。

[例 1-11] (第 18 届 IMO 试题) 设数列 $u_0 = 2, u_1 = \dfrac{5}{2}, \cdots, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$, 求证:

$$[u_n] = 2^{\frac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}}$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数。

分析: 由要证的结论可知, 应有 $u_n = 2^{b_n} + \alpha$, 其中 $b_n = \dfrac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}$, $0 \leq \alpha < 1$。为了判断 α的形式, 可先计算所给数列的前几项

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1}, u_2 = \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1},$$

$$u_3 = 8\frac{1}{8} = 2^3 + 2^{-3}, \quad u_4 = 32\frac{1}{32} = 2^5 + 2^{-5}, \cdots$$

由上述几项的规律可猜测 $u_n = 2^{b_n} + 2^{-b_n}$, 这不难用数学归纳法证明。这样, 只要注意到 $0 \leq 2^{-b_n} < 1$, 便得所证结果$[u_n] = 2^{b_n}$。证略。

通过特殊化, 可发现解题的有效途径。对于特例的方法, 有时可直接迁移用于一般, 有时可稍加改造用于一般, 有时则能给我们以某种“顿悟”和启迪, 引导我们发现一般的方法。

[**例** 1-12]　**如图** 1. 4, $\triangle PQR$ **和** $\triangle P'Q'R'$ **是两个全等的正三角形,六边形** ABCDEF **的边长分别记为**: $AB = a_1$, $BC = b_1$, $CD = a_2$, $DE = b_2$, $EF = a_3$, $FA = b_3$, **求证**: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$。

分析: **此题一拿到手,大凡都有这样的念头,想要利用余弦定义来证明(因为结论中涉及到线段的平方关系),但稍经尝试,就会发现难以奏效。这样,不妨先“退”一下,考察问题的特殊情形。**

图　1. 4　　　　**图**　1. 5

考察 $\triangle PQR$ **和** $\triangle P'Q'R'$ **的对应边平行时的情形,如图** 1. 5, $PQ \parallel R'P'$, $QR \parallel P'Q'$, $RP \parallel Q'R'$, **这时** $\triangle PAB$, $\triangle Q'BC$, $\triangle QCD$, $\triangle R'DE$, $\triangle REF$, $\triangle P'FA$ **都是正三角形,注意到正三角形的边长与面积的关系** $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, **则要证的结论即为**:

$$S_{a_1} + S_{a_2} + S_{a_3} = S_{b_1} + S_{b_2} + S_{b_3} \qquad (1\text{-}12\text{-}1)$$

其中 S_{a_1} **表示边长为** a_1 **的** $\triangle PAB$ **的面积,其余类同。**

因为 $\triangle PQR$ **和** $\triangle P'Q'R'$ **是全等的正三角形,故**(1-12-1)

式成立是显然的,这样,对如图 1.4 的特例已获得解决。在一般情形下,是否也可以能用面积关系来解决呢? 下面尝试一下。

显然,在一般情形下,也有(1-12-1)式成立,不过这时$\triangle PAB$,…,$\triangle PFA$ 已不是正三角形,不能直接由(1-12-1)推出结论,需作一些变换。用 h_{a_1} 表示$\triangle PAB$ 的边 a_1 上的高,其余类同,则(1-12-1)可化为

$$a_1h_{a_1} + a_2h_{a_2} + a_3h_{a_3} = b_1h_{b_1} + b_2h_{b_2} + b_3h_{b_3} \tag{1-12-2}$$

另外,注意到$\triangle PAB$,…,$\triangle PFA$ 这六个三角形都是相似三角形,故有

$$\frac{h_{a_1}}{a_1} = \frac{h_{b_1}}{b_1} = \cdots = \frac{h_{b_3}}{b_3} = k$$

所以 $h_{a_1} = ka_1, h_{b_1} = kb_1, \cdots, h_{b_3} = kb_3$。

把上面各式分别代入(1-12-2),得

$$k(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = k(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

所以 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$。

上面通过考察特例,发现了(1-12-1)式在解题中的关键作用。而且对一般情形的论证方法,是由特例的论证方法改造而来的。

[例 1-13] 若平面 α通过$\triangle ABC$ 的重心 G(如图 1.6),则在 α同侧的两个顶点 B, C 到平面 α的距离 BB', CC' 的和等于另一个顶点 A 到平面 α的距离 AA'。

分析:先考虑它的特殊情况:平面 $ABC\perp\alpha$ 此时,原题就转化为一个平面几何问题:“若直线 l 通过$\triangle ABC$ 的重心 G,则在直线 l 同侧的两个顶点 B, C 到 l 的距离 BB', CC' 的和等

图 1.6　　　　图 1.7

于另一个顶点 A 到 l 的距离 AA'。”这个平面几何问题的证明是不难的，只要利用 BC 的中点 D 到 l 的距离 DD' 作媒介，先证 $BB'+CC'=2DD'$，再证 $2DD'=AA'$ 便可。

这个证法是否适用于空间情形呢？试取 BC 的中点 D，作 $DD'\perp\alpha$，则 DD' 在平面 $BCC'B'$ 上，且 DD' 是直角梯形 $BCC'B'$ 的中位线，故有 $BB'+CC'=2DD'$，下面再证 $2DD'=AA'$。(如图 1.7)

在平面 $AA'D'D$ 上，$DD'/\!/AA'$，且 $AG=2GD$，$\triangle AA'G\backsim\triangle DD'G$，由此得 $\frac{AA'}{DD'}=\frac{AG}{GD}=2$，故 $AA'=2DD'$。这样，我们通过对特殊情况的研究，找到了一般问题的解。

[例 1-14]　(1985 年全国联赛试题) 平面上给定五个相异点，它们之间最大距离与最小距离的比为 λ，求证：$\lambda\geq 2\sin 54°$。

分析：先考察 5 个点的最特殊的相对位置：假定它们为正五边形的顶点(如图 1.8)，这时容易验证

$$\lambda=\frac{AC}{AB}=\frac{\sin 108°}{\sin 36°}=\frac{\sin 72°}{\sin 36°}=2\cos 36°=2\sin 54°$$

如果变动 B 点, 而$\angle ABC \geq 108°$, 则 $\lambda \geq 2\sin 54°$, 于是, 存在这样一个问题: 将任意五点中的两点连接起来后, 是不是一定有以某点为顶点的角不小于 108°呢?经过以上分析, 解题思路便有了头绪。

证明: 若这五点的凸包为一个凸五边形, 则至少有一个内角不小于 108°, 不妨设$\angle ABC \geq 108°$, 不失一般性假定$\angle BAC \geq \angle BCA$, 此时

图 1.8

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle BCA)} \geq \frac{\sin(\angle ABC)}{\sin\frac{180° - \angle ABC}{2}}$$

$$= \frac{\sin(\angle ABC)}{\cos\frac{1}{2}\angle ABC} = 2\sin\left(\frac{1}{2}\angle ABC\right) \geq 2\sin 54°.$$

若这五点的凸包为三角形或凸四边形, 则至少有一点在另外三点构成的三角形中, 不妨设 D 在$\triangle ABC$中, 此时$\angle ADC$, $\angle BDC$, $\angle ADB$ 中至少有一个不小于 120°, 由上所证可知结论成立。

若凸包为一线段, 设 B 点在 A, C 之间, 则 $\lambda \geq \frac{|AC|}{\min(|AB|, |BC|)} \geq 2 > 2\sin 54°$, 得证。

借助特殊化, 可实现问题的化归, 即将一般问题转化为特殊问题进行处理。

[例 1-15] (1979 年安徽省竞赛试题) 过面积为 1 的三

角形的重心任作一直线,把这个三角形分为两部分,求证这两部分的面积之差 $|S_1 - S_2| \le \frac{1}{9}$。

分析:如图 1.9,设△ABC 的重心为 G,先考虑过 G 的一特殊直线:过 G 且平行于底边的直线 $B'C'$,由重心的性质知 $\frac{S_{\triangle AB'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AG}{GM}\right)^2 = \frac{4}{9}$,这易证明

$$|S_1 - S_2| = |S_{四边形BCC'B'} - S_{\triangle AB'C'}|$$
$$= \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{9}$$

再考虑一般情形,设 ED 是过 G 的任一直线。为了将一般情形化为特殊情形处理,过 B' 作 $B'F \parallel AC$,交 ED 于 F,则 $\triangle B'FG \cong \triangle GC'D$,此时

图 1.9

$$S_{BCDE} - S_{\triangle AED} < S_{BCC'B'} - S_{\triangle AB'C'} = \frac{1}{9}$$

故 $|S_1 - S_2| < \frac{1}{9}$,这种情形也已解决。

与特殊化相反,一般化就是我们为了解题的需要放开或改变一些条件的限制,把具体的个性问题转化为一般的共性问题来研究。有时,这种方法使我们视野更广阔,避免在枝节问题上的纠缠,容易触及问题的本质,给解题带来简便。

[例 1-16] 设 P 是大于 3 的素数,证明:$P^2 - 1$ 能被 24 整除。

分析:因为 $P^2 - 1 = (P + 1)(P - 1)$,P 为奇数(因 P 是大于 3 的素数),所以 $P^2 - 1$ 能够被 4 整除,这样,要使 $P^2 - 1$ 能

够被 24 整除还差一个因子 6, 注意到 $P=25$ 时, P^2-1 能被 24 整除, 因此 P 是大于 3 的素数并不是 P^2-1 能够被 24 整除的必要条件。这样, 我们完全可以考虑打破 P 是大于 3 的素数这一条件的限制。现转向找 P^2-1 能被 6 整除且包含所有大于 3 的素数的这一类数 P 的表达式, 很自然我们会想到 $6n$, $6n\pm1$, $6n\pm2$, $6n+3(n\in N)$ 型的数去找, 由于 $6n+3$, $6n\pm2$, $6n$ 型的素数都是合数。因此, 只须考虑 $6n\pm1$ 型的数。

令 $P=6n\pm1$, 则 $P^2-1=12n(3n\pm1)$。显然, 不论 n 是奇数还是偶数, $n(3n\pm1)$ 都能被 2 整除。所以, 当 P 是 $6n\pm1$ 型的数时, P^2-1 能被 24 整除, 这样, 由于 $6n\pm1$ 型的数包含了所有大于 3 的素数, 我们实际上证明了更一般的命题。

上例如果不放宽条件, 由于素数 P 没有一般的表达式可供利用, 处理起来反而困难得多。

[例 1-17] 证明任意的钝角三角形都可以划分为内部两两互不相交的 7 个锐角三角形。

分析: 如图 1.10, 设 $\angle ACB$ 是钝角, 由于对锐角 $\angle A$ 和 $\angle B$ 来说: 我们总可以在 $\triangle ABC$ 内如图画出两个锐角 $\triangle ADG$ 和 $\triangle EBF$, 这样, 问题就转化为能否在剩下的每个内角都是钝角的五边形 $DEFCG$ 中划分出 5 个内部两两互不相交的锐角三角形问题。

图 1.10

为了方便讨论, 我们首先考虑更一般的情形。把钝角五边形划分成五个互不相交的任意三角形, 显然, 我们只要在五边

形 DEFCG 内任取一点 P, 然后顺次连接 PC, PG, PD, PE, PF 就能作出满足条件的图形(如图 1.10)。

于是, 下面只需要考虑如何选取 P 点位置, 使得在钝角五边形内划分出五个三角形都是锐角三角形。由于对一般的钝角五边形, 我们很难直接找出其划分的方法。因此, 我们不妨先考察几种特殊的钝角五边形, 以便找出其规律。显然, 我们首先会想到正五边形。此时正五边形的中心恰好符合我们的要求, 而正五边形的中心就是其内切圆的圆心, 由此, 我们想到具有内切圆的钝角五边形的情形。事实上, 我们不难证明此时的内切圆圆心也正好满足条件。

这样, 原来的问题就变成在开始划分出锐角△ADG 和△EBF 时如何适当地选取线段 DG 和 EF 的位置, 使剩下的钝角五边形具有内切圆。由于, 如果钝角五边形 GDEFC 有内切圆, 那么它也是△ABC 的内切圆, 因而我们只需先作△ABC 的内切圆, 再作线段 DG 和 EF 与⊙O 相切, 且使△ADG 和△EBF 都是锐角三角形, 然后分别连接 OD, OE, OF, OC, OG, 钝角△ABC 就被划分为 7 个内部两两不相交的锐角三角形(如图 1.11)。

图 1.11

上面交错运用一般化、特殊化手段，发现了解题的关键所在。尽管分析是冗长的，最后的证明可用构造性的写法简洁表示出来（这留给读者），但实在展现了我们发现解法的全貌，仍然是十分有意义的。

在运用数学归纳法解竞赛题时，有时为了归纳的需要，需先证明一个比原命题更为一般的命题——往往是更强的命题。

[例 1-18]　设 $n\geq 2$，一个 $n\times n$（即 n 行 n 列）的数表中，每两行都不完全相同，证明一定可以删去一列，剩下的数表中的每两行仍然都不完全相同。

分析：这个问题直接用数学归纳法证明较难奏效，主要在于从 $n=k+1$ 归结到 $n\leq k$ 难以实现，但是如果将命题加强之后，却可达到意外的效果，加强命题为：

一个 $m\times n(2\leq m\leq n)$ 的数表中，如果每两行都不完全相同，那么一定可以删去 $(n-m+1)$ 列，删去这些列之后，每两行仍然不完全相同。

现对 m 进行归纳证明。当 $m=2$ 时，第一行中有一个元素与第二行中同一列的元素不同，保留这一列，删去其它所有 $(n-2+1)$ 列，第一行与第二行仍然不同。

设命题对 $m=k$ 成立，即对于 $k\times n(2\leq k\leq n)$，可以删去 $(n-k+1)$ 列，剩下来的每两行仍然不同。考虑数表 $(k+1)\times n(2\leq k+1\leq n)$ 的前 k 行，即考察数表 $k\times n$，根据归纳假设，必可删去 $(n-k+1)$ 列，剩下数表 $k\times(k-1)$ 每两行均不相同，不失一般性，不妨设为数表中左上角 $k\times(k-1)$（如图 1.12），现在增添第 $k+1$ 行，若最后一行与 $k\times(k-1)$ 中各行不全相同，则命题显然成立，若与某一行前面的 $k-1$ 个数全相同，则

图 1.12

与该行的后面$(n-k+1)$个数中, 位于同一列的数至少有一个数不相同, 不妨设第 k 列的两个数不相同, 由此得到$(k+1)$行乘前 k 列数表, 每两行不全相同, 因此加强后的命题成立, 从而原题得证。

1.3 类 比

我们在观察与思考某个数学对象 A 时, 总是习惯地想到与其有一些相同或类似属性且比较熟悉的另外某个数学对象 B。若 A 具有性质 a, b, c, B 却具有性质 a, b, c, d, 则我们往往猜想 A 也具有性质 d; 若处理数学对象 B 有一些成功的经验, 则我们又往往推测可把这些成功经验用到处理对象 A 中去。这种思考与处理问题的方法, 就叫做类比。

类比, 是获得发现的源泉之一。著名物理学家开普勒(J. Kepler, 1571—1630) 说过:"…我们诊视类比胜于任何别的东西, 它是我最可依赖的老师。它能揭示自然界的秘密, 在几何中它们应该是最不容忽视的。"康德也深刻地指出:"每当理智

缺乏可靠论证思路时,类比这个方法往往能指引我们前进。”

降维类比——即将三维空间问题类比于二维平面问题,是我们发现空间问题解题思路的常用推理办法。

[例 1-19] 设四面体 S-ABC,作二面角 B-SA-C 的平分面 SAD 交 BC 于 D,求证:

$$\frac{\triangle SAB\text{ 的面积}}{\triangle SAC\text{ 的面积}}=\frac{\triangle SBD\text{ 的面积}}{\triangle SCD\text{ 的面积}}.$$

分析:直接不知从何下手进行证明。因此可先考虑平面几何中的类似问题(即内角平分线定理):“若△ABC 的内角 A 的平分线为 AD,则$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$。”如图 1.13。

这个类似问题的证明方法可通过面积实现问题的转化,即$\frac{AB}{AC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BD}{DC}$。

由这个平面上类似问题的解法得到启示,那么我们对原问题实现体积的过渡。

证明:如图 1.14,作 DE⊥平面 SAB,DF⊥平面 SAC,则 DE=DF。

因
$$V_{D-SAB}=\frac{1}{3}\cdot(\triangle SAB\text{ 的面积})\cdot DE$$
$$V_{D-SAC}=\frac{1}{3}\cdot(\triangle SAC\text{ 的面积})\cdot DF$$

所以
$$\frac{\triangle SAB\text{ 的面积}}{\triangle SAC\text{ 的面积}}=\frac{V_{D-SAB}}{V_{D-SAC}}$$

又设过 A 引平面 SAC 的高为 h,则

$$\frac{V_{D-SAB}}{V_{D-SAC}}=\frac{\frac{1}{3}(\triangle SBD\text{ 的面积})\cdot h}{\frac{1}{3}(\triangle SCD\text{ 的面积})\cdot h}=\frac{\triangle SBD\text{ 的面积}}{\triangle SCD\text{ 的面积}}。$$

图 1.13　　　　图 1.14

故原等式得证。

[例 1-20] 设四面体 $S-ABC$ 中, SA, SB, SC 两两垂直, 且 $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$, P 为△ABC 内一点, P 在面 SAB, SBC, SCA 上的射影分别是 D, E, F, 问 P 位于何处时, $PD^2+PE^2+PF^2$ 取得最小值, 并求这个最小值。

分析: 先解决平面上的类似问题:"设 P 是直角△ABC 的斜边 AB 上的一点, 已知 $BC=a$, $AC=b$, $PD\perp AC$ 于 D, $PE\perp BC$ 于 E, 试求; P 为何处时 PD^2+PE^2 有最小值, 其值为何?"

解决这个问题, 如图 1.15 易知 $PD^2+PE^2=PC^2$, 问题转化为求 PC^2 取最小值的 P 的位置。显然, 只有当 $CP\perp AB$, 即 P 为 C 在 AB 上的射影时, PD^2+PE^2 有最小值, 最小值为 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

类比到空间, 如图 1.16, 我们在四面体内部得到一个长方体 PS, 由长方体的性质有 $PS^2=PD^2+PE^2+PF^2$, 于是问题转化为求 PS^2 的最小值及此时 P 的位置。这时当 P 为 S 在

图 1.15　　　　　　图 1.16

面 ABC 内的射影时, PS 最小。这样可用体积求出 PS^2 的最小值, 其最小值为$\frac{abc}{\triangle ABC\text{的面积}}$。

[例 1-21]　设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体, θ_{12}, θ_{13}, θ_{14}, θ_{23}, θ_{24}, θ_{34} 是六条棱 A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 上二面角的平面角, 如果这六个角都是锐角, 证明:

$$\prod_{i<j}\cos\theta_{ij}\leq\frac{1}{3^6}. \qquad (1\text{-}21\text{-}1)$$

分析: 为寻求其证明, 先找平面上类似问题的证明: 在锐角△ABC 中, 求证:

$$\cos A\cos B\cos C\leq\frac{1}{8}. \qquad (1\text{-}21\text{-}2)$$

这个三角不等式, 最简单的证法为:

$$\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos C]\cos C$$

$$\leq\frac{1}{2}(1-\cos C)\cos C$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{(1-\cos C)+\cos C}{2}\right]^2=\frac{1}{8}.$$

审视一下这个证法便知,证明中用了三角形内角和定理,不宜推广到空间。于是,考虑(1-21-2)的别的证法:

利用三角形的射影定理可得:

$$a=b\cos C+c\cos B\geq 2\sqrt{bc\cos B\cos C},$$

$$b=c\cos A+a\cos C\geq 2\sqrt{ca\cos A\cos C},$$

$$c=a\cos B+b\cos A\geq 2\sqrt{ab\cos A\cos B}。$$

将上面三个不等式相乘便得(1-21-2)中不等式。

这个证法能否推广到空间呢?为此先建立空间中的射影定理。

空间射影定理:在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,四个面的面积为 $S_1=S_{\triangle A_2A_3A_4}$, $S_2=S_{\triangle A_1A_3A_4}$等, θ_{ij}是棱 A_iA_j 上的二面角的平面角, θ_{ij}为锐角,则

$S_1=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}$,等。

证明:由 A_1 作对面的垂直 A_1H,交面 $A_2A_3A_4$ 于 H,如图 1.17,则有

$$\begin{aligned}S_1&=S_{\triangle HA_3A_4}+S_{\triangle HA_2A_4}+S_{\triangle HA_2A_3}\\&=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}.\end{aligned}$$

下面我们着手证明不等式(1-21-1),由射影定理知:

$$\begin{aligned}S_1&=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}\\&\geq 3\sqrt[3]{S_2S_3S_4\cos\theta_{34}\cos\theta_{24}\cos\theta_{23}}\end{aligned}$$

同理

$$S_2\geq 3\sqrt[3]{S_1S_3S_4\cos\theta_{34}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}},$$

图　1. 17

$$S_3 \geq 3\sqrt[3]{S_1 S_2 S_4 \cos\theta_4 \cos\theta_4 \cos\theta_2},$$

$$S_4 \geq 3\sqrt[3]{S_1 S_2 S_3 \cos\theta_3 \cos\theta_3 \cos\theta_2}.$$

将上面四个不等式相乘并约去 $S_1S_2S_3S_4$ 便得所证不等式。

上例说明,作降维类比时,由平面类似问题的证法发展到空间问题的证法,往往有一个选择、比较、移植准备的过程,这个过程要求数学的创造性和机智的发挥,而不是简单的模仿。

减元、降次类比,也是数学解题时常用的一种类比手段。

[例 1-22]　(1974 年美国数学奥林匹克试题)已知 a, b, c 都是正实数,证明

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

分析:去掉变元 c,得到类比题:

$$a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$$

该不等式用比的方法比较易证。实际上,

$$\frac{a^a b^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}$$

当 $a\geq b>0$ 时，$\frac{a}{b}\geq 1$，比值不小于 1。

当 $0<a<b$ 时，$\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，比值大于 1。故不论哪种情形，均有 $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$。

将上面证法类比到三元情形，我们有

$$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}}\geq 1$$

从而不等式获证。

[例 1-23]　解方程组

$$x+y+z=3$$
$$x^2+y^2+z^2=3$$
$$x^3+y^3+z^3=3$$

分析：降低未知量的次数，同时减少未知数的个数，得类比方程组

$$x+y=2$$
$$x^2+y^2=2$$

它的解法是利用韦达定理较简单。因为 $xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=1$，由韦达定理，$x$，$y$ 是方程 $w^2-2w+1=0$ 即 $(w-1)^2=0$ 的根，从而 $x=y=1$。类比到原题得如下解法。

解：$xy+yz+zx=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]=3$，

又　$(x+y)(y+z)(z+x)=\frac{1}{3}[(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)]=8$，

即
$$(3-z)(3-x)(3-y)=8$$

或　　$27-9(x+y+z)+3(xy+yz+zx)-xyz=8$
由此解得 $xyz=1$。于是由韦达定理知 x, y, z 是方程 $t^3-3t^2+3t-1=0$ 即 $(t-1)^3=0$ 的根, 故 $x=y=z=1$ 是原方程组的解。

降次、减元类比是与原问题的特殊情形进行类比的解题方法, 往往伴随着特殊化手段的运用。

结构类比, 即将两个相似的结构系统进行类比, 是我们发现结论和寻求解题思路的常用手法。

例如, 等差数列和等比数列有一些对偶的性质。前者有: $a_n-a_{n-1}=d$(常数), $a_n=a_1+(n-1)d$; 后者有 $a_n \div a_{n-1}=q$(常数), $a_n=a_1q^{n-1}$。即前者进行"+"运算, 对偶地后者有进行"·"运算的相似性质。广义上我们可把它们看作一个相似系统。现已知等差数列$\{a_n\}$成立等式

$$a_1-C_{n-1}^1a_2+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}a_n=0$$

把其类比到等比数列中去, 自然我们就猜测有例 1-24 所述的结论。

[例 1-24]　设$\{a_n\}$是等比数列, 求证:

$$a_1 \cdot a_2^{-C_{n-1}^1} \cdot a_3^{C_{n-1}^2} \cdots a_n^{(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}}=1 \qquad (1\text{-}24\text{-}1)$$

证明: 当 $n=3$ 时, 因 a_1, a_2, a_3 成等比数列, 所以$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}$, 即 $a_1a_2^{-2}a_3=1$, (1-24-1) 式成立。假设 $n=k$ 时结论成立。由 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 成等比数列有

$$a_1 \cdot a_2^{-C_{k-1}^1} \cdots a_k^{(-1)^{k-1}C_{k-1}^{k-1}}=1 \qquad (1\text{-}24\text{-}2)$$

由 $a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}$成等比数列得

$$a_2 \cdot a_3^{-C_{k-1}^1} \cdots a_k^{(-1)^{k-2}C_{k-1}^{k-2}} \cdot a_{k+1}^{(-1)^{k-1}C_{k-1}^{k-1}}=1 \qquad (1\text{-}24\text{-}3)$$

将(1-24-2)**式除以**(1-24-3)**式,并由** $C_{k-1}^{i}+C_{k-1}^{i-1}=C_k^i$ **可得**

$$a_1\cdot a_2^{-C_k^1}\cdot a_3^{C_k^2}\cdots a_{k+1}^{(-1)^{k-1}\cdot C_k^k}=1$$

这说明当 $n=k+1$ **时**,(1-24-1)**式成立。因此**(1-24-1)**式得证。**

下面再举例说明结构类比在发现解题思路中的作用。

[**例** 1-25] **已知** x,y,z **为实数,且** $xy\neq-1$, $yz\neq-1$, $zx\neq-1$,**求证**:

$$\frac{x-y}{1+xy}+\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx}=\frac{x-y}{1+xy}\cdot\frac{y-z}{1+yz}\cdot\frac{z-x}{1+zx}.$$

分析:**注意到结论的结构特征是某三项的和等于这三项的积,联想常见的三角题**:"**在非直角**△ABC **中**, $tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$。"**把这题的证明类比移植到本例中,须使** $\frac{x-y}{1+xy}=tgA$, $\frac{y-z}{1+yz}=tgB$, $\frac{z-x}{1+zx}=tgC$,**且使** $A+B+C=k\pi(k\in z)$。

证明:**令** $x=tg\alpha, y=tg\beta, z=tg\gamma$,

则 $\frac{x-y}{1+xy}=tg(\alpha-\beta)$, $\frac{y-z}{1+yz}=tg(\beta-\gamma)$,

$\frac{z-x}{1+zx}=tg(\gamma-\alpha)$。

因 $$(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=0$$

于是 $$(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)=-(\gamma-\alpha)$$

两边取正切,得

$$\frac{tg(\alpha-\beta)+tg(\beta-\gamma)}{1-tg(\alpha-\beta)tg(\beta-\gamma)}=-tg(\gamma-\alpha),$$

去分母整理得

$$tg(\alpha-\beta)+tg(\beta-\gamma)+tg(\gamma-\alpha)$$
$$=tg(\alpha-\beta)\cdot tg(\beta-\gamma)\cdot tg(\gamma-\alpha).$$

即 $\frac{x-y}{1+xy}+\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx}=\frac{x-y}{1+xy}\cdot\frac{y-z}{1+yz}\cdot\frac{z-x}{1+zx}$。

运用类比方法解题时,要注意类比对象的多样性。如四面体的类比对象可以是三角形,也可以是平面四边形。

[例 1-26] 设四面体 ABCD 的相对棱 AB, CD 所成的角为 θ,求证:

$$\cos\theta=\frac{|(AB^2+CD^2)-(AD^2+BC^2)|}{2AC\cdot BD}\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

分析:因三角形没有与相对棱类似的概念,所以原问题无法类比到三角形中去。这样,转而考察它在平面四边形中的类似问题:“已知平面四边形 ABCD 的各边长,求对角线 AC, BD 的夹角公式。”

这个相似问题的解答如下:如图 1. 18 所示,设$\angle BOA=\theta$,由余弦定理得

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta$$
$$AD^2=OA^2+OD^2+2OA\cdot OD\cos\theta$$

图 1. 18

所以

$$AB^2-AD^2=(OB^2-OD^2)-2OA\cdot BD\cdot\cos\theta \tag{1-26-1}$$

同理

$$CD^2 - CB^2 = (OD^2 - OB^2) - 2OC \cdot BD \cdot \cos\theta \tag{1-26-2}$$

由(1-26-1)式与(1-26-2)式相加可得

$$2AC \cdot BD\cos\theta = (AD^2 + BC^2) - (AB^2 + CD^2)$$

又 AC 与 BD 的夹角 $\theta \in 0, \frac{\pi}{2}$, 故有

$$\cos\theta = \frac{|(AD^2 + BC^2) - (AB^2 + CD^2)|}{2AC \cdot BD}.$$

类比到空间, 由余弦定理类比联想到异面直线上两点间的距离公式, 于是有下面的解法。

证明: 如图 1.19, 设 MN 是 AC 与 BD 的公垂线段, MN = h, 则由异面直线上两点间的距离公式(不妨设 A, B 在 M, N 的同侧, C, D 在 M, N 的异侧)可得

$$AB^2 = h^2 + MA^2 + NB^2 - 2MA \cdot NB\cos\theta$$

$$CD^2 = h^2 + MC^2 + ND^2 - 2MC \cdot ND\cos\theta$$

$$AD^2 = h^2 + MA^2 + ND^2 + 2MA \cdot ND\cos\theta$$

$$BC^2 = h + MC^2 + NB^2 + 2MC \cdot NB\cos\theta$$

由以上四式易得 $\cos\theta = \frac{(AD^2 + BC^2) - (AB^2 + CD^2)}{2AC \cdot BD}$。故相对棱 AB, CD 的夹角即为题中的结果。

最后指出, 类比是一种似真推理, 由类比得出的结论不一定正确, 还必须加以严格的数学证明。这是类比法运用时特别值得注意的地方。

图 1.19

1.4 等 价 变 换

等价变换就是等价地变更问题，即通过改变命题的叙述或改变观察的角度，将原命题变为等价的新命题，使之更简洁、明了，更为我们所熟悉，从而达到解题之目的。

[例 1-27] 数列$\{a_n\}$是首项为 a，公式为$-a$ 的等比数列，记 $b_n = a_n\lg|a_n|$，当 $0< a< 1$ 时，问是否存在自然数 M，便对任意自然数 n 都有 $b_n< b_M$？

分析：注意到 $b_n = (-1)^{n-1}a^n\lg a^n$，奇数项为负，偶数项为正，因此问题转化为其等价的命题：数列$\{b_n\}$中的所有偶数项中是否存在最大项。这样一作等价变换，问题就容易多了。只要比较$\{b_{2k}\}$相邻两项而讨论清它的增减性便可达到目标。

解：由题设条件$\{b_n\} = \{(-1)^{n-1}a^n\lg a^n\}$，考虑$\{b_n\}$的偶数项作成的数列$\{b_{2k}\}$，易得

$$b_{2k+2} - b_{2k} = (2a^{2k}\lg a)(1-a^2)\left(k - \frac{a^2}{1-a^2}\right)$$

记 s 为不超过 $\frac{a^2}{1-a^2}$ 的最大整数,则

$$b_{2k+2}-b_{2k}=\begin{cases}>0 & \text{当 } k<s,\\ \geq 0 & \text{当 } k=s,\\ <0 & \text{当 } k>s。\end{cases}$$

故有 $$b_2<b_4<\cdots<b_{2s}\leq b_{2s+2}>b_{2s+4}>\cdots$$

这说明 $\{b_{2k}\}$ 中以 b_{2s+2} 项为最大,而对任意自然数 k 都有 $b_{2k-1}<0<b_{2s+2}$。所以存在自然数 $M=2s+2$,使对任意自然数 n 都有 $b_n<b_M$。

上例通过等价变换,使结论更为具体,为发现解法开辟了道路。

[例 1-28] 若两个三角形的三边分别为 a, b, c 与 $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$, 且 a, b, c 两两不相等,试判断这两个三角形是否相似?

分析:要判断这两个三角形是否相似,只要看等式 $\frac{\lg a}{a}=\frac{\lg b}{b}=\frac{\lg c}{c}$ 即

$$a^{\frac{1}{a}}=b^{\frac{1}{b}}=c^{\frac{1}{c}} \qquad (1\text{-}28\text{-}1)$$

是否成立。

易见判断(1-28-1)能否成立等价于判断:是否存在正数 m,使 $a=m^a$, $b=m^b$, $c=m^c$ 同时成立。再以方程观点看这个问题知其等价为:方程 $x=m^x$ 是否有三个不相等的实根 a, b, c。现在,再换以函数的观点,便得其等价的命题:一次函数 $y=x$ 的图象与指数函数 $y=m^x$ 的图象在第一象限是否有三个不同的交点。到了这里,问题便比较明显了。因为直线 $y=x$ 与指数函数 $y=m^x$ 的图象最多只有两个交点,故问题中的两个

三角形不相似。

变更看问题的观念进行等价变换是上例解题获得成功的关键。

[例 1-29]　假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一排列，对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列，求下面和式的最大值。

$$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \cdots + |a_n - n|$$

分析：影响解题的最大障碍是这些绝对值符号，设法去掉它是解题的关键。注意到 $|a_i - i|$ 应等于 $a_i - i$ 或 $i - a_i$ 减号仍保留，于是原命题可等价变为：

"数 $1, 1, 2, 2, \cdots, n, n$ 中间怎样加上 $n-1$ 个"+"号，n 个"-"号，使所得的代数和最大，最大值是多少？"

这个问题较易解决，因减去的数越小，代数和越大。

当 $n = 2k$ 时，最大值为

$$\begin{aligned} & n + n + \cdots + (k+1) + (k+1) - k - k - \cdots - 1 - 1 \\ = {} & 2[n + (n-1) + \cdots + (k+1)] - 4(k + \cdots + 2 + 1) \\ = {} & \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

当 $n = 2k+1$ 时，最大值为

$$\begin{aligned} & n + n + \cdots + (k+1) - (k+1) - k - k - \cdots - 1 \\ = {} & 2(1 + 2 + \cdots + n) - 4(1 + 2 + \cdots + k) - 2(k+1) \\ = {} & \frac{n^2 - 1}{2}. \end{aligned}$$

[例 1-30]　求证不存在自然数 p, q，满足不等式

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{3q^2} \qquad (1\text{-}30\text{-}1)$$

分析：先观察(1-30-1)式，去绝对值符号得

$$-\frac{1}{3q^2} < \sqrt{2} - \frac{p}{q} < \frac{1}{3q^2}$$

即

$$\sqrt{2}\,q + \frac{1}{3q} > p > \sqrt{2}\,q - \frac{1}{3q} \qquad (1\text{-}30\text{-}2)$$

从几何角度看(1-30-2)式,可将原命题等价变换为:如果 p, q 是自然数,那么不存在边长分别为 $\sqrt{2}\,q, \frac{1}{3q}, p$ 的三角形。

再用反证法证明变更后的命题。如果存在边长分别为 $\sqrt{2}\,q, \frac{1}{3q}, p$ 的三角形,那么由余弦定理

$$p^2 = 2q^2 + \frac{1}{9q^2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos A \quad (A\text{ 为边长 } p \text{ 的对角})$$

于是

$$2q^2 + \frac{1}{9q^2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} < p^2 < 2q^2 + \frac{1}{9q^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

当 $q = 1$ 时,可得 $1 < p^2 < 4$,矛盾。

当 $q \geq 2$ 时,$p^2 > 2q^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} > 2q^2 - 1$,且 $p^2 < 2q^2 + \frac{1}{36} + \frac{2\sqrt{2}}{3} < 2q^2 + 1$,从而有 $p^2 = 2q^2$,矛盾。至此,问题的证明就完成了。

[例 1-31] (1991 年中国数学奥林匹克试题)求所有的自然数 n,使得

$$\min_{k \in N} \left(k^2 + \frac{n}{k^2} \right) = 1991$$

这里 $\frac{n}{k^2}$ 表示不超过$\frac{n}{k^2}$的最大整数,N 是自然数集。

分析: **题目中的式子意味着**: **对任何自然数** x **都有**

$$x^2 + \frac{n}{x^2} \geq 1991 \qquad (1\text{-}31\text{-}1)$$

并且存在自然数 x_0, **使得**

$$x_0^2 + \frac{n}{x_0^2} < 1992 \qquad (1\text{-}31\text{-}2)$$

现须利用(1-31-1)**和**(1-31-2)**求出** n **的范围。**

注意到(1-31-1)**相当于**: **对任何自然数** x **都有**

$$x^4 - 1991x^2 + n \geq 0 \qquad (1\text{-}31\text{-}3)$$

条件(1-31-2)**相当于**: **存在自然数** x_0, **使得**

$$x_0^4 - 1992x_0^2 + n < 0 \qquad (1\text{-}31\text{-}4)$$

条件(1-31-3), (1-31-4)**又可以写成**

$$\min_{x\in N}(x^4 - 1991x^2 + n) \geq 0 \qquad (1\text{-}31\text{-}5)$$

$$\min_{x\in N}(x^4 - 1992x^2 + n) < 0 \qquad (1\text{-}31\text{-}6)$$

问题等价变换为: **求满足**(1-31-5)**和**(1-31-6)**的自然数** n **的范围。**

因为 $x^4 - 1991x^2 + n = \left(x^2 - \frac{1991}{2}\right)^2 + n - \frac{1991^2}{4}$, **与** $\frac{1991}{2} = 995\frac{1}{2}$ **最接近的平方数是** $32^2 = 1024$, **我们求得**

$$\min_{x\in N}(x^4 - 1991x^2 + n) = \left(32^2 - \frac{1991}{2}\right)^2 + n - \frac{1991^2}{4}$$

$$= \left(28\frac{1}{2}\right)^2 + n - \frac{1991^2}{4} = n - 967\times 1024$$

用同样的方法可以求得

$$\min_{x\in N}(x^4 - 1992x^2 + n) = n - 968\times 1024$$

条件(1-31-5)**和**(1-31-6)**相当于**

$$967 \times 1024 \leq n < 968 \times 1024$$

故适合题目要求的 n 的范围是 $990208 \leq n \leq 991231$。

上面三例都是通过分析问题的某一术语(或关系式)的本质意义,“换一种说法”而达到目标的。

通过建立一一对应关系,我们可将一个命题转化为另一命题进行处理,这是数学解题中最为常用的方法之一,将在下章 2.8 节中予以专门介绍。

1.5　分　　解

把一个“大问题”变换成一组“小问题”来处理,这种解题的策略称为“分解”。善于使用“分解”的策略来处理问题,是一项重要的数学基本功。法国著名数学家笛卡尔曾谈到他解题的一条重要经验就是:“把我所考察的每一个难题,都尽可能地分成细小的部分,直到可以圆满解决的程度为止。”

命题的分解,有两种基本方式:横向分解和纵向分解。

所谓“横向分解”,就是把原问题变换成(或改编成)一组互相独立的“小问题”来处理。在这个题组中,任一小题的解决都不依赖于另一小题的结果,而当这组小题全部解出以后,综合它们的结果便极易推得原问题的结论。

[例 1-32]　求一个三位数,使这个三位数与它的各位数字之和的比值为最小。

分析:设所求的三位数为 $\overline{xyz}$,则这个三位数与它的各位数字之和的比值为 $k=\dfrac{100x+10y+z}{x+y+z}$。于是原问题可改述为:$\overline{xyz}$ 是多少时,比值 k 最小?

很明显，直接求出三位数$\overline{xyz}$（即一下子求出它的三位数字）是困难的，不妨分别求其各位数字，于是原问题可“分解”成如下一组“小问题”来处理：

问题A：要使比值k最小，数字x应为何值？

解答A：因为$k=100-\frac{90y+99z}{x+y+z}$，可知不论数字$y$和$z$取定任何一组允许值，要使比值$k$最小，数字$x$只能是1。

问题B：要使比值k最小，数字y应为何值？

解答B：因为$k=10+\frac{90x-9z}{x+y+z}$，可知不论数字$x$和$z$取定任何一组允许值，要使比值$k$最小，数字$y$只能是9。

问题C：要使比值k最小，数字z应为何值？

解答C：因为$k=1+\frac{99x+9y}{x+y+z}$可知不论数字x和y取定任何一组允许值，要使比值k最小，数字z只能是9。

综合以上三小题的结果，可知所求的三位数是199。

[例1-33]　试证：任何一个三角形都可以剪成有限多块，拼成一个矩形，并使这矩形有一条边为定长m。

分析：要证明这个命题，只需给出一种具体的剪拼方法，能够实现命题中的剪拼要求就行了。但命题对剪拼成的图形要求比较苛刻：(i)它必须是矩形；(ii)且它必须有一条边为定长m。一下子考虑全部要求，问题实在太复杂，很难设计出有效的剪拼方法。于是我们把原问题分解成如下一组“小问题”来处理。

问题A：试证：任何一个三角形都可以剪成有限多块，拼成一个矩形。

解答A：如图1.20，设△ABC是任意一个三角形，BC是

它的最大边, AD 是 BC 边上的高, 过 AD 的中点 G 作 BC 的平行线, 再分别从 B, C 作这条平行线的垂线 BF, CE (F、E 为垂足), 得矩形 BCEF。易知△AHG≌△BHF, △AGK≌△CEK。因此 △ABC 可以剪拼成矩形 BCEF。

图 1.20

问题 B: 试证: 任何一个矩形都可以剪成有限多块, 拼成一个新矩形, 使新矩形有一条边为定长 m。

解答 B: 如图 1.21 和如图 1.22, 设 ABCD 是任意一个矩形。在 BC 边或其延长线上取一点 E, 使 BE= m(图 1.21 表示 BC> m 的情形, 图 1.22 表示 BC< m 的情形; 如果 BC= m, 则命题显然成立, 无需讨论)。连结 AE, 作 CG∥AE 交 BA 或其延长线于 G, 再以 BE, BG 为邻边作矩形 BEFG。易知△AGH ≌△EKC, △GKF ≌△HCD(图 1.21) 或△AGH ≌△KCE, △AKD≌△HEF(图 1.22)。因此, 矩形 ABCD 可以剪拼成矩形 BEFG, 而后者有一边 BE 为定长 m。

图 1.21

图 1.22

根据以上两小题的结果,易知原命题成立。

根据问题的特点,对问题进行分类讨论,也是横向分解的一种特例。

[例 1-34]　(1983 年全国高中联赛试题)在六条棱长分别为 2, 3, 3, 4, 5, 5 的所有四面体中,最大的体积是多少?证明你的结论。

分析:根据三角形两边之差小于第三边这一性质,按题设的数据,所有一边是 2 的三角形,其余两边只可能是①3, 3; ②5, 5; ③4, 5; ④3, 4。从而题设四面体中,以 2 为公共边的两个侧面三角形的其余两边只可能有下列三种情况:

(i) ①与②; (ii) ①与③; (iii) ②与④。于是原问题便可分解为对棱长分别为(i), (ii), (iii)三种构造的四面体来计算体积的最大值(或估计)。

解(i):如图 1.23, $AC=BC=3$, $AD=BD=5$, $\because 3^2+4^2=5^2$, $\therefore CD\perp AC$, $CD\perp BC$, $\therefore CD\perp$平面 ABC。

图　1.23

由对称性知,这样的四面体只有一个,其体积 $V_1=\frac{1}{3}CD\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3^2-1^2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$。

解(ii):这样的四面体共有两个,如图 1.24 和图 1.25,易知它们的体积相等,记为 V_2, $\because 2^2+4^2<5^2$,故$\angle ABD$ 为钝角,即棱 BD 与平面 ABC 斜交。设 D 至底边 ABC 的高为 h_2,

则 $h_2 < BD = 4$，故

$$V_2 = \frac{1}{3} h_2 S_{\triangle ABC} < \frac{4}{3} S_{\triangle ABC} = V_1 = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

图 1.24　　　　　　　　图 1.25

解(iii)：这样的四面体也有两个，如图 1.26 和图 1.27，它们的体积也相等，记为 V_3，$\because 2^2 + 5^2 > 5^2$，故 $\angle BAC$ 为锐角，即棱 AB 与平面 ACD 斜交，设 B 至底边 ACD 的高为 h_3，则 $h_3 < AB = 2$，故 $V_3 = \frac{1}{3} h_3 \cdot S_{\triangle ACD} < \frac{2}{3} S_{\triangle ACD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot$

$$\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{6}{5}\sqrt{11} < V_1 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

故最大体积为 $V_1 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$。

下面再讨论纵向分解。所谓“纵向分解”，就是把原问题变成(或改编成)一组互相关联的“小问题”来处理。在这个题组中，后一小题的解决依赖于前一小题的结果，而当最后一个小题解出时，便得到原问题的结论。

[例 1-35]　已知一个四位数是完全平方数，它的前两位

图 1.26

图 1.27

数字相同,后两位数字也相同。求这个四位数。

分析:设这个四位数为 N,它的前两位数字都为 x,后两位数字都为 y,则有

$$N = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y \quad (1\text{-}35\text{-}1)$$

于是原问题可以改述为:若由等式(1-35-1)确定的四位数 N 是完全平方数,问 N 为多少?

显然,这里的解题关键在于确定数字 x 和 y 的值。但直接计算其值似难入手,于是我们把原问题变换成如下两个互相关联的“小问题”来处理。

问题 A:要使 N 为完全平方数,数字 x 与 y 应满足什么条件?

解答 A:由等式(1-35-1)可得

$$N = 11(100x + y) = 11(11\times 9x + x + y) \quad (1\text{-}35\text{-}2)$$

由此可知,N 含有素因数 11。因此,要使 N 为完全平方数,必须$(11\times 9x + x + y)$含有素因数 11,从而$(x + y)$必须含有素

因数 11。但 $1 \leq x+y<18$，故必须 $x+y=11$。

问题 B：要使 N 为完全平方数，数字 x 和 y 应为何值？

解答 B：由问题 A 的解答可知 $x+y=11$。将其代入(2)就得 $N=11^2(9x+1)$。由此可知，要使 N 为完全平方数，必须(且只须) $9x+1$ 为完全平方数。对 $x=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 计算 $9x+1$ 的值，可知当且仅当 $x=7$ 时 $9x+1$ 是完全平方数，从而 N 是完全平方数，这时 $y=11-7=4$。

根据问题 B 的结果，可知所求的四位数是 $N=7744$。

[例 1-36]　(第 19 届 IMO 试题) 设 $f(n)$ 是定义在自然数集 Z^+ 上并在 Z^+ 中取值的函数。试证明：如果对每个自然数 n 有

$$f(n+1)>f(f(n)) \qquad (1\text{-}36\text{-}1)$$

则 $f(n)=n$。

分析：本题已知条件是不等式，而结论却是等式，直接证明这一结论是困难的。于是我们将原问题分解成两个相关联的"小问题"。

问题 A：设 $f(n)$ 是定义在 Z^+ 上并在 Z^+ 中取值的函数，且满足条件(1-36-1)，则 $f(n) \geq n$。

解答 A：对 n 用归纳法。显然 $f(1) \geq 1$，假设 $f(n-1) \geq n-1$成立，那么

$$f(n)>f(f(n-1)) \geq f(n-1) \geq n-1$$

于是 $f(n)>n-1$，由此得 $f(n) \geq n$，得证。

问题 B：设 $f(n)$ 满足问题 A 的已知条件，求证 $f(n) \leq n$。

解答 B：由已知条件及问题 A 的结果知

$$f(n+1)>f(f(n)) \geq f(n)$$

这说明 f 严格递增。

再由 f 严格递增及已知条件 $f(f(n)) < f(n+1)$，得 $f(n) < n+1$，即 $f(n) \leq n$。

最后，由问题 A 和 B 便知 $f(n) = n$，证毕。

1.6　从反面看问题

有些数学问题，直接从正面解决是相当困难的。这时若从问题的反面入手，作逆向探求，便可绕过正面障碍，收到良好的解题效果。

逆转解题程序，即按与命题构作程序相反的方向去探求问题的解，时常是十分有效的。

[例 1-37]　今有四段链条，每一段上有三节封闭的环，现在要打开一些环，把十二节环连成一个首尾相接的圆圈。每打开某一环得 2 分，每接上一环得 3 分。而且要使得不超过 15 分，应打开哪些环？(图 1.28)。

图　1.28

分析：通常人们认为这道题很难。一般想法是：先打开第一段边上的一环，与第二段的一个边环接上。再打开第二段的另一边环，接到第三段的一个边环上。照此方法，接成圆圈，就得打开四环接上四环得 $4\times 5 = 20$ 分，不行，须另想办法。现在我们把程序逆转过来，从事物的最终状态——一个首尾相接的圈开始，考察应怎样打开尽可能少的环使其分成相等的四部分，那么，由图显而易知，只须打开其中的三个环即可。将此过程反过来，只要将某一段链条的三个环全打开，用

它们按图中方式将其它三段链首尾连接起来便接成一圈, 此时, 打开三环接上三环共得 $3\times 5=15$ 分, 符合要求, 从而问题获解。

[例 1-38]　求证: 在锐角$\triangle ABC$ 中, 总存在$\triangle A'B'C'$ 使 A', B', C' 分别在 AB, BC, CA 上, 且 $A'B'\perp AB$, $B'C'\perp BC$, $C'A'\perp CA$。

证明: 设$\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c, 如果依题意直接在$\triangle ABC$ 内去构造$\triangle A'B'C'$ 则很难, 但反过来, 先确定$\triangle A'B'C'$ 再作$\triangle ABC$ 则问题很容易。实际上, 先作锐角$\triangle A'B'C'$, 设其边长分别为 x, y, z。过 A' 作 $AB\perp A'B'$, 过 B' 作 $BC\perp B'C'$, 过 C' 作 $CA\perp C'A'$, 如图 1.29。由于 $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ 互不平行, 从而 AB, BC, CA 互不平行, 必交成$\triangle A_0B_0C_0$, 由于$\triangle A'B'C'$ 为锐角三角形, 则 A', B', C' 分别在线段 A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 上, 且 $\angle C'A'B'+\angle A_0A'C'=90°=\angle A_0A'C'+\angle A_0$, 所以 $\angle A_0=\angle C'A'B'$, 同理 $\angle B_0=\angle C'B'A'$, $\angle C_0=\angle A'C'B'$, 于是$\triangle A_0B_0C_0$ 为锐角三角形且与$\triangle A'B'C'$ 相似。

图　1.29

如果所作的$\triangle A'B'C'$ 与预先给定的$\triangle ABC$ 相似, 那么只须对图 1.29 进行适当的伸缩即可使$\triangle A_0B_0C_0\cong\triangle ABC$, 此时的$\triangle A'B'C'$ 即为要求的三角形, 从而命题获证。实际上, 如果适当选择 x, y, z, 即可使$\triangle A_0B_0C_0\cong\triangle ABC$, 这只须 x, y, z 满足:

$$x\csc C' + y\operatorname{ctg} A' = C_0A_0 = b$$
$$y\csc A' + y\operatorname{ctg} B' = A_0B_0 = c \qquad (1\text{-}38\text{-}1)$$
$$z\csc B' + x\operatorname{ctg} C' = B_0C_0 = a$$

由于

$$\begin{vmatrix} \csc C' & \operatorname{ctg} A' & 0 \\ 0 & \csc A' & \operatorname{ctg} B' \\ \operatorname{ctg} C' & 0 & \csc B' \end{vmatrix} = \csc A' \cdot \csc B' \cdot \csc C'$$
$$+ \operatorname{ctg} A' \cdot \operatorname{ctg} B' \cdot \operatorname{ctg} C' \neq 0,$$

于是方程(1-38-1)有唯一解, 即 x, y, z 唯一存在, 从而这样的 $\triangle A\dot{B}\dot{C}$ 唯一存在。

构造反例, 可迅速否定一个命题, 使问题得以解决, 这在数学解题中是常用的。

[例 1-39] (1988 年前苏联教委推荐试题) 在等边三角形 ABC 内部任取两点 M 和 N, 试问, 是否一定能以线段 AM, BM, CM, AN, BN, CN 为棱组成一个四面体?

解: 从正面肯定这个结论困难很大, 这诱发我们怀疑结论的确定性, 用构造反例的方法来解决这个问题。我们来给定一个不能组成四面体的例子。记△ABC 的边长为 a, 在其内部取一点 M, 使线段 AM, BM, CM 的长度各不相同, 但使它们全都介于 $\frac{a}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ 之间。以 ε记线段 AM, BM 和 CM 两两长度之差的绝对值中的最小值。再取点 N 充分靠近顶点 A, 使得

$$AN < \varepsilon, BN > \frac{\sqrt{3}a}{2} + \varepsilon, CN > \frac{\sqrt{3}a}{2} + \varepsilon$$

对于这样选出的点 M 和 N, 线段 AN 之长除了可能不小于线

段 BN 和 CN 的长度之差外, 它将小于除自身之外的 5 条线段中的其它任何两条线段的长度之差。由于四面体中每条棱都是两个面上的三角形的边, 然而根据上述关于 AN 的性质看出, 它至多可同其余线段中的一对线段形成三角形。故这样的六条线段不能构成任一个四面体的六条棱。

又取 M, N 为正三角形△ABC 的中心, 这时所得的六条线段都相等, 显见它们可作为某一正四面体的六条棱。

综上知本题的最终答案为: 不一定。

我们通常用的反证法就是一种从反面考虑问题的方法。

[例 1-40]　空间 $2n(n\geq 2)$ 个点, 任四点不共面, 连 n^2+1 条线段, 证明其中至少有三条线段组成了一个三角形。

证明: 用反证法。如图 1. 30 所示, 设其中任意三条线段都没有组成三角形, 并设从 A_1 点引出的线段最多, 且这些线段为 $A_1B_2, \cdots, A_1B_k$。除 $A_1, B_1, B_2, \cdots, B_k$ 外, 其它点设为 $A_2, A_3, \cdots, A_{2n-k}$。显然$\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$中任意两点间都无线段相连, 于是每一个 B_i 发出的线段至多$(2n-k)$条, 而每个 A_j 发出的线段至多 k 条($i=1, 2, \cdots, k; j=1, 2, \cdots, 2n-k$), 故线段总数最多为

图　1. 30

$$(2n-k)+(2n-k)k]=k(2n-k)$$

$$\leq \left(\frac{k+(2n-k)}{2}\right)^2=n^2$$

此与已知矛盾, 故原命题得证。

上例运用反证法的过程中, 恰当地选择了一类量, 并作出

关于这类量中的某个最大量或最小量的假设，这叫做反证法中的优化假设。反证法中的优化假设可以用来打破证明中的僵局，迅速找出矛盾点。

［例 1-41］ 设 E 是平面上 $2n$ 个点构成的集合，其中任意三点不共线，现将其中 n 个点涂成红色，n 个涂成蓝色，试证：总可找到两两没有公共点的 n 条直线段，使其中每条线段的两个端点不同色。

证明：n 个红点，n 个蓝点两两配对的方法记为 p，这样的配对方法共有 $n!$ 种。

令 $S(p)$ 表示配对方法 p 所对应的 n 条端点不同色的线段的长度和，于是，必存在配对方法 p_0，使 $S(p_0)=\min\{S(p)\}$。

配对方法 p_0 所对应的几条端点不同色的线段必不相交。因为不然的话，若存在两条线段 A_1B_2 与 A_2B_1 相交，则用 A_1B_1，A_2B_2 代替 A_1B_2，A_2B_1，其他点间的连结方式不变，就可得到一个新的配对方式 p'。由于 $A_1B_2+A_2B_1>A_1B_1+A_2B_2$，因此，$S(p_0)>S(p')$，此与 p_0 的定义矛盾。

故用配对方式 p_0 可以组成没有公共点的 n 条线段，而同一线段的两个端点不同色。

本题的证明从整体上看属于构造性证法。但从局部看，证明的最后一部分是反证法，用来证明所构造的 p_0 符合本题要求。因此，这是构造性证明中的局部反证。局部反证在其他证法中也时有出现，它已成为一种常用的解题思维方式。

上面介绍了从反面看问题的三种常用形式：逆转程序，构造反例及反证法，读者还可从后面的章节里找到这方面的不少例子。

第 2 章　数学竞赛中的解题方法

竞赛数学是活的数学，解竞赛题一般没有现成的解题思路可循，重要的是整体、全局的洞察力、敏锐的直觉和独创性的构造。要达到这样高的解题境界，解题者必须掌握一般的思维规律，并能灵活运用一些典型的方法与技巧。只有在此基础上，才能发展解题的创造性，才能点燃灵感的火花。

上章介绍了解数学竞赛题的思维方式。本章则介绍解竞赛题的一些典型方法，并通过大量实例说明这些方法的灵活运用。在选材上不求全面，力求深入；不求模式化，力求在运动过程中体现方法"活"的灵魂。

2.1　奇偶分析法

把整数集分为奇数集和偶数集是整数分类中最简单的分类，然而利用这种简单的分类可以解决各种形形色色与整数有关的问题。如问题本身是数值问题，则可通过直接讨论数的奇偶性达到目的。如问题表面上与奇偶性无直接联系，这就需要我们去分析、发掘其中的奇、偶因素，借助于一定的模型，使之"奇偶化"。奇偶分析的这种独特的分析问题方法，常常使问题变得异乎寻常的简单。

1. 奇偶数的简单性质

关于奇偶数有许多十分浅显的事实,最为常用的有:

(1) 任何奇数不等于偶数。

(2) 两个数的和与差具有相同的奇偶性。

(3) 任意多个奇数的积为奇数;一个整数与一个偶数的积为偶数。

(4) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为整数, $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则 A 为奇数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有奇数个奇数;

A 为偶数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有偶数个奇数。

(5) 奇数的平方可表示成 $8m + 1$ 的形式;偶数的平方可表示成 $4m$ 的形式(m 是整数)。

(6) 任何一个正整数 n, 都可写成 $n = 2^m t$ 的形式, m 为非负整数, t 为奇数。

2. 奇偶分析的实例

(1) 直接运用奇偶数的性质解题

[例 2-1] (第一届全国中学生数学冬令营试题)能否把 1, 1, 2, 2, 3, 3, …, 1986, 1986 这些数排成一行,使得两个 1 之间夹着一个数,两个 2 之间夹着 2 个数, …,两个 1986 之间夹着 1986 个数? 证明你的结论。

解:这是不可能的,证明如下:

如果有一种合乎要求的排列,那么把这些数排好之后,共占有了 $2\times 1986 = 3972$ 个位置,依从左到右的顺序把这些位置称为第 1 号位,第 2 号位, …,第 3972 号位。显然奇数标号的位置与偶数标号的位置各占一半,都是 1986 个。

如果某奇数 i 左边的一个排在奇数号位上，由于两个 i 之间恰好相隔 i 个号位，所以，右边的那个 i 也必定排在奇号位上，这表明，排在奇号位上的奇数必有偶数个，设为 $2t$。

如果某偶数 j 左边的一个排在奇数号位上，由于两个 j 之间恰好相隔 j 个号位，j 为偶数，故右边的一个 j 必排在偶号位上。换句话说，在 1986 个奇号位上，恰有一半为偶数所占。

这样 1986 个奇号位中，993 个为偶数所占，$2t$ 个为奇数所占，于是

$$1986 = 993 + 2t$$

此式左边为偶数，右边为奇数，不可能成立，这个矛盾证明了我们的结论。

[例 2-2]　(第 2 届东北三省竞赛试题) 求出所有正整数 m, n 使得

$$(m+n)^m = n^m + 1413. \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

解：由于 $n^m + 1413 = (m+n)^m \geq m^m + n^m$，所以 $m^m \leq 1413$，由此得 $m \leq 4$。

若 m 为偶数，则不论 n 为奇数还是偶数，(2-2-1) 式的左右两边一边为奇数，一边为偶数，不可能成立。于是 m 为奇数，所以 $m=1$ 或 $m=3$，将 $m=1$ 代入原等式，不能成立。当 $m=3$ 时，则由 $(3+n)^3 = n^3 + 1413$，解得 $n=11$ 和 $n=-14$（舍去），故所求的正整数解为 $m=3, n=11$。

[例 2-3]　(第 27 届 IMO 试题) 设 d 为不等于 2, 5, 13 的任一正整数。证明在集合 $\{2, 5, 13, d\}$ 中可以找到两个不同的元素 a, b，使得 $ab-1$ 不能构成一完全平方数。

分析：若能证明 $2d-1, 5d-1, 13d-1$ 中至少有一个不

是完全平方数就足够了。假若不是这样,那么存在正整数 x, y, z 使

$$2d - 1 = x^2 \tag{2-3-1}$$

$$5d - 1 = y^2 \tag{2-3-2}$$

$$13d - 1 = z^2 \tag{2-3-3}$$

由于平方数只有 $4k$, $4k+1$ 两种形式,如果 d 为偶数,设 $d=2k$,则 $2d-1=4k-1$,与(2-3-1)矛盾,于是 d 为奇数,这时由(2-3-2),(2-3-3)知 y, z 为偶数。

设 $y=2y_1$, $z=2z_1$,于是(2-3-3)式减(2-3-2)式得

$$8d = z^2 - y^2 = 4(z_1^2 - y_1^2)$$

所以

$$2d = (z_1 + y_1)(z_1 - y_1) \tag{2-3-4}$$

由于 z_1+y_1 与 z_1-y_1 同奇偶,又其积为偶数,于是 $x_1 \pm y_1$ 均为偶数。设 $z_1+y_1=2m$, $z_1-y_1=2n$,代入(2-3-4)得 $d=2mn$,这与 d 为奇数矛盾。故命题成立。

[例 2-4] (第 26 届 IMO 预选题)设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一组数,它们之间每一个都取值 ±1,并且

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \cdots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n + x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1 + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0$$

求证: n 是 4 的倍数。

证明:记 $a_i = x_ix_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}$,其中 $x_{n+1}=x_1$, $x_{n+2}=x_2$, $x_{n+3}=x_3$ ($i=1, 2, \cdots, n$)。因为 a_i 等于 $+1$ 或 -1,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$,所以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中 $+1$ 和 -1 的个数相等。设分别有 k 个,则 $n=2k$。

又因为 $a_1a_2\cdots a_n = x_1^4x_2^4\cdots x_n^4 = 1$,即 $(-1)^k \cdot 1^k = 1$,所以 $k=2m$ 为偶数,因此 $n=2k=4m$,得证。

[**例** 2-5]　(1992 **年全国联赛试题**) **设集合** $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$, **若** X **是** S_n **的子集**, **把** X **中的所有数的和称为** X **的“容量”**(**规定空集的容量为零**)。**若** X **的容量为奇**(**偶**)**数**, **则称** X **为** S_n **的奇**(**偶**)**子集。求证**: S_n **的奇子集与偶子集的个数相等。**

分析: **设** S_n **的奇子集个数为** a_n, **偶子集的个数为** b_n, **则易见** $a_n+b_n=2^n$。

先求 a_n, **为此**, **先弄清奇子集的结构。注意到奇数个奇数的和是奇数这一结论**, **因此** S_n **的任何含有奇数个奇数**(**任意个偶数**)**的子集都是奇子集**, **反之也对。**

设 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$ ([x] **表示不超过** x **的最大整数**), $l=n-k$, **则** S_n **中有** k **个偶数**, l **个奇数。于是所有奇子集的个数为**

$a_n=2^k\cdot(C_l^1+C_l^3+\cdots+C_l^{2i-1})$　(2i-1 **是不超过** l **的最大奇数**), **易见** $a_n=2^k\cdot 2^{l-1}=2^{n-1}$, **这样** $b_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}=a_n$, **得证。**

[**例** 2-6]　(**第三届全国中学生冬令营试题**) **如** n **是不小于** 3 **的自然数**, **以** f(n) **表示不是** n **的因数的最小自然数**(**例如** f(12)=5), **如果** $f(n)\geq 3$, **又可作** f(f(n))。**类似地**, **如果** $f(f(n))\geq 3$, **又可作** f(f(f(n))) **等等**, **如果**

$$\underbrace{f(f\cdots f}_{k\text{个}f}(n)\cdots))=2$$

就把 k **叫做** n **的“长度”。如果用** l_n **表示** n **的长度**, **试对任意的自然数** $n(\geq 3)$, **求** l_n, **并证明你的结论。**

解: **令** $n=2^m t$(m **是整数**, t **为奇数**), **下面分情况讨论**:

1) **当** m=0 **时**, **则** f(n)=f(t)=2, $l_n=1$;

2) 当 $m\neq 0$ 时，引入记号：设 u 是不能整除奇数 t 的最小奇数，记作 $u=g(t)$。又分两种情况讨论：

(a) 设 $g(t)<2^{m+1}$，则 $f(n)=u$，$f(f(n))=2$，所以 $l_n=2$。

(b) 设 $g(t)>2^{m+1}$，则 $f(n)=2^{m+1}$，$f(f(n))=f(2^{m+1})=3$，$f(f(f(n)))=f(3)=2$，所以 $l_n=3$。

因此，l_n 的值如下

$$l_n=\begin{cases}1 & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ 3 & \text{当 } n=2^m t,\ m \text{ 为正整数}, t \text{ 为奇数, 且 } g(t)>2^{m+1}\\ & \text{其中 } g(t) \text{ 是不能整除奇数 } t \text{ 的最小奇数。}\\ 2 & \text{其他情况。}\end{cases}$$

(2) 用奇偶化模型解题。

有些问题表面上与奇偶性无关，但可通过引进某种模型使之奇偶化，再利用奇偶性的性质使问题得以顺利解决。

[例 2-7]　8×8 正方形表格代表 64 间陈列室(每格代表一室)，邻室有门相通。某人想从第一行第一格进，从第 8 行第 8 格出，且每室到且只到一次，问这样的参观路线是否存在?

分析：记第 i 行第 j 列的格为 a_{ij}。让 a_{ij} 对应着 $i+j$，若 $i+j$ 为奇(偶)数，则称 a_{ij} 为奇(偶)格。这样，就将问题奇偶化了。显然，任何相邻两格的奇偶性不同。注意到从 a_{11} 到 a_{88} 要穿过 63 格，从而要改变 63 次奇偶性。又 a_{11} 为偶格，穿过 63 格后(每格到且只到一次)只能到达一个奇格，但 a_{88} 为偶格，故参观路线不存在。

[例 2-8]　(1986 年全国联赛试题)平面直角坐标系中，横纵坐标都是整数的点称为整点，试设计一种方法将所有的整点染色，每一个整点染成白色，红色或黑色中的一种颜色，

使得

① 每一种颜色出现在无穷多条平行于横轴的直线上;

② 对任意白点 A, 红点 B 和黑点 C, 总可以找到一个红点 D, 使得 ABCD 为平行四边形。证明你设计的方法符合上述要求。

分析: 在平行四边形四个顶点 A, B, C, D 中, 红点两个, 黑、白点各一个, 因此染色时, 红点应多染, 黑、白点宜对等。染色的方法之一是把每个整点的横、纵坐标按奇、偶性分类:

(奇, 奇) 染白, (偶, 偶) 染黑, (奇, 偶) 和 (偶, 奇) 都染红。

这样, 要求①是满足的, 且三种颜色不在一直线上, 因若白点 $A(x_1, y_1)$, 红点 $B(x_2, y_2)$, 黑点 $C(x_3, y_3)$ 三点共线, 则

$$(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)$$

因 $(x_3 - x_1)$, $(y_3 - y_1)$ 都是奇数, 而 $(y_2 - y_1)$, $(x_2 - x_1)$ 一奇一偶, 故上式左边为奇数, 右边为偶数, 不可能。

另一方面, 取 $x_4 = x_1 + x_3 - x_2$, $y_4 = y_1 + y_3 - y_2$, 则 x_4, y_4 一奇一偶, 故 $D(x_4, y_4)$ 染红色。由中点公式, 明显地, ABCD 为平行四边形。

因此, 上面设计的染色方法符合①和②的要求。

[例 2-9] (1965 年基辅奥林匹克试题) 在一张有 n 行 n 列(n 为奇数) 的方格纸上, 每格中填上数 1, 2, …, n 之一, 要求每一行和每一列都出现所有这些数, 而且所填的数关于一条对角线对称。证明: 在这条对角线上所有 1 到 n 的数都出现。

分析: 用 (i, j) 表示位于第 i 行、第 j 列的方格。设 k 是 1 到 n 的任一数, 它在表格的每一行出现一次, 因此共出现 n 次, 为一奇数; 而在作为对称轴的那条对角线以外, 若出现在

$(i, j)(i \neq j)$ 处，一定还出现在 (j, i) 处，因此共出现偶数次，所以 k 一定在这条对角线上出现，命题获证。

*[例 2-10]　(第 6 届国家集训队选拔题) 将凸多面体的每一条棱都染成红、黄两色之一。两边异色的面角称为奇异面角。某顶点 A 处的奇异面角数称为该顶点的奇异度，记为 S_A。求证：总存在两个顶点 B 和 C，使得 $S_B + S_C \leq 4$。

证明：将凸多面体的红色棱标上数 1，黄色棱标上数 0。定义任意一个面角的度数为该面角两边标数之和再模 2 所得余数 0 或者 1。于是一个面角为奇异面角的充分必要条件为其度数是 1。任取一顶点 A，由于在计算 A 处所有面角度数之和时，从 A 出发的每一条棱的标数都用了两次，从而 A 处所有面角度数之和为偶数。于是顶点 A 的奇异度 S_A 为偶数。同理可证任一面所包含的奇异面角数也是偶数。

假设凸多面体有 k 个顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_k$；j 个面 $M_1, M_2, \cdots, M_j$；t 条棱。设面 M_i 所包含的棱数为 $t_i (i = 1, 2, \cdots, j)$，显然

$$\sum_{i=1}^{j} t_i = 2t$$

令 M_i 所含的奇异面角数为 S_{M_i}，由于它是偶数，从而

$$S_{M_i} \leq 2 \frac{t_i}{2}$$

又 $t_i \geq 3$，于是得

$$S_{M_i} \leq 2 \frac{t_i}{2} \leq 2t_i - 4$$

由此可得凸多面体所有奇异面角度应满足

$$\sum_{i=1}^{j} S_{M_i} \leq 2\sum_{i=1}^{j} t_i - 4j = 4(t - j)$$

由 Euler 公式可得 $t-j=k-2$，于是有

$$\sum_{i=1}^{j} S_{M_i} \leq 4k-8$$

所以 $\sum_{i=1}^{k} S_{A_i}=\sum_{i=1}^{j} S_{M_i} \leq 4k-8$。

又 $S_{A_1}, S_{A_2}, \cdots, S_{A_k}$ 都是偶数，从而必存在 i, j 使得 $S_{A_i} \leq 2, S_{A_j} \leq 2$，即 $S_{A_i}+S_{A_j} \leq 4$。得证。

上面四例说明，一些与整数无直接联系的研究对象，可以通过考察对象的位置坐标，运动次数等诸方面相应的奇偶性，或者通过赋值使之奇偶化，以便借助于奇偶数的那些简单而浅显的结果使问题获解。这正是奇偶分析法有着广泛应用的原因。

习 题 2.1

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是自然数，1, 2, …, n 的一个排列，若 n 为奇数，求证：$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 为偶数。

2. 在 1, 2, 3, …, 1993 这 1993 个数的前面任意添上正号或负号，问它们的代数和是奇数还是偶数?

3. 确定并证明 $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$ 的所有整数解。(美国第一届奥林匹克试题)

4. 一个正方形被划分成 n^4 个格子的棋盘。在这些格子中放有 n^3 个棋子，每个格子最多放一枚棋子。同时，每一行放有同样多的棋子，并且，这些棋子还对称于此正方形的一条对角线，称这条对角线为 d。证明

a) 如果 n 是奇数，那么 d 上至少有一枚棋子;

b) 如果 n 是偶数，那么有一种放置方法，使 d 上没有棋子(1988 年前联邦德国竞赛试题)。

5. 试证:不存在三阶"幻体",即不可能将 $1, 2, \cdots, 2^7$ 分别填入 $3 \times 3 \times 3$ 的立方体格架中,使所有共线的三数之和均相等。

2.2 同 余 法

同余理论是研究整数性质的重要工具,它的建立大大简化了研究整数某些性质的过程,给许多的计算与证明带来方便。利用同余理论解题的方法,我们简称为同余法。

1. 同余的概念及性质

给定一个正整数 $m>1$,如果用 m 去除两个整数 a 和 b 所得的余数相同,则称 a 与 b 对模 m 同余,记作 $a \equiv b \pmod{m}$。否则,就称 a, b 对模 m 不同余,记作 $a \not\equiv b \pmod{m}$。

下面用定理的方式给出同余的一些简单而有用的性质,限于篇幅,我们只列出结论,其证明可参考任何一本《初等数论》教材,这里从略。

定理 2.1 ①若 $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$,则 $a \equiv c \pmod{m}$。

② 如果 $a \equiv b \pmod{m}$, $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$,则

1° $ax + \alpha y \equiv bx + \beta y \pmod{m}$;

2° $a\alpha \equiv b\beta \pmod{m}$;

3° $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$, $f(x)$ 为任意给定的整系数多项式。

定理 2.2 若 $ac \equiv bc \pmod{m}$,且 $(m, c) = d$,则 $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$。

定理 2.3 若 $a \equiv b \pmod{m_i}$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $a \equiv b(\bmod [m_1, m_2, \cdots, m_n])$。

2. 同余法应用实例

同余法应用十分广泛，现分类举例如下：

(1) 用于处理有关整除的问题

[例 2-11] (第 6 届 IMO 试题) ①试确定所有的正整数 n，使 2^n-1 能被 7 整除；②证明对于所有的正整数 n，2^n+1 不能被 7 整除。

解：①因 $2^3=8 \equiv 1(\bmod 7)$，所以，当 $n=3k$ 时，$2^n=2^{3k}=(2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1(\bmod 7)$；当 $n=3k+1$ 时，$2^n=2^{3k}\times 2 \equiv 1\times 2 \equiv 2(\bmod 7)$；当 $n=3k+2$ 时，$2^n=2^{3k}\times 2^2 \equiv 1\times 4 \equiv 4(\bmod 7)$。所以，当且仅当 $n=3k$ 时，$7 \mid (2^n-1)$。

② 仿①可证，留作练习。

[例 2-12] (第 21 届前苏联奥林匹克试题) 在黑板上有 1, 2, …, 1987 这些数。作这样的变换：将黑板上的数擦去一些，并添加上被擦去的数的和被 7 除所得的余数。经过若干次后，黑板上只有两个数，一个是 987，求另一个数。

解：因为 $1+2+3+\cdots+1987=\dfrac{1987\times 1988}{2}=1987\times 7\times 142 \equiv 0(\bmod 7)$，即黑板上全体数字的和被 7 除余数为 0。

据变换的过程知，每次变换仅擦去 7 的整数倍，故黑板上所留下的数的和被 7 除余数仍为 0。

设最后留下的两数为 987 和 a。由于 $987>7$，从而 a 为被擦去的数的和被 7 除后所得的余数，故 $0 \leq a<7$。

由于 $987+a \equiv 0(\bmod 7)$，$987 \equiv 0(\bmod 7)$，故

$$a \equiv 0 \pmod 7$$

所以 $a=0$。

由上解题过程知,抓住变换的实质,黑板上全体数字的和被 7 **除余数始终不变,是解此题的关键。**

(2) **用于处理与数码有关的计算问题**

[**例** 2-13] (**第** 17 **届** IMO **试题**) **当** 4444^{4444} **写成十进制数时,它的各位数字之和是** A。**设** B **为** A **的各位数字之和,求** B **的各位数字之和。**

分析: **首先要注意到一个常见的事实: 一个正整数** $N=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ **与它的各位数字之和** $S(N)$ **对模** 9 **同余。事实上,由于** $10\equiv1 \pmod 9$,**所以** $10^m\equiv1 \pmod 9$,**从而**

$$\begin{aligned} N &= a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n \\ &\equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv S(N) \pmod 9。\end{aligned}$$

因此,本题可逐步求 4444^{4444}, A, B, C **对模** 9 **的余数以进行估计。**

解: **设** C **为** B **的各位数字之和。先估计** C **的范围。因** $4444^{4444} < 10000^{4444}$, 10000^{4444} **有** $4\times4444+1=17777$ **位。每位数字不超过** 9, **故** $A<9\times17777=159993$, **故** A **最多有** 6 **位数字,且首位不超过** 1, **于是** $B\leq1+5\times9=46$, **从而** B **最多有两位数字,且首位不超过** 4, **于是有** $C\leq4+9=13$。

再计算 C **对模** 9 **的余数**, $4444^{4444}\equiv7^{4444}\equiv7\times7^{4443}\equiv7\times(7^3)^{1481}\equiv7(9\times38+1)^{1481}\equiv7 \pmod 9$。**又因为** $4444^{4444}\equiv A\equiv B\equiv C \pmod 9$, **所以** $C\equiv7 \pmod 9$。**今已证** $C\leq13$, **故必** $C=7$。

[**例** 2-14] (**第** 31 **届** IMO **预选题**) **对于给定的正整数** k, **以** $f_1(k)$ **表示** k **的各位数码字和的平方,并设**

$$f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$$

试求 $f_{1991}(2^{1990})$ 的值。

解: 在估计 $f_{n+1}(2^{1990})$ 时, 同时考虑 $f_n(2^{1990})$ 关于模 9 的余数, 可使问题得以简捷的处理。

因 $2^{1990} < 8^{700} < 10^{700}$, 故 2^{1990} 至多有 700 位。于是

$$f_1(2^{1990}) < (9 \times 700)^2 < 4 \times 10^7,$$

$$f_2(2^{1990}) < (3 + 9 \times 7)^2 < 4900,$$

$$f_3(2^{1990}) \leq (3 + 9 \times 3)^2 = 30^2,$$

由于 $f_3(2^{1990})$ 是完全平方数, 可设 $f_3(2^{1990}) = a^2$, 则

$$a \equiv f_2(2^{1990}) \equiv f_1^2(2^{1990}) \equiv ((2^{1990})^2)^2$$

$$\equiv 2^4 \cdot (2^6)^{1326} \equiv 2^4 \equiv 7(\mathrm{mod} 9)$$

因此在小于 30 的正整数中, 只需考虑 7, 16, 25。于是

$$f_3(2^{1990}) \in \{7^2, 16^2, 25^2\} = \{49, 256, 625\}$$

注意到 49, 256, 625 这三个数的各位数码字之和都是 13, 于是

$$f_4(2^{1990}) = 13^2 = 169$$

继续下去, 就有 $f_5(2^{1990}) = 16^2 = 256$, $f_6(2^{1990}) = 13^2 = 169$, 一般地

$$f_n(2^{1990}) = \begin{cases} 169 & 2 \mid n \\ 256 & 2 \nmid n \end{cases}$$

特别地有 $f_{1991}(2^{1990}) = 256$。

(3) 用于求解不定方程

[例 2-15]　求所有的正整数 m, n 使得

$$1! + 2! + \cdots + m! = n^2$$

解: 不难验证, $(m, n) = (1, 1), (3, 3)$ 都有解。当 $m = 4, 5$ 时, 问题无解。下面, 我们用同余来证明当 $m \geq 5$ 时, 方程没有正整数解。

模 5, 显然

$$1!+2!+3!+4!=33\equiv 3 \pmod 5,$$

而当 $k\geq 5$ 时, $k!\equiv 0 \pmod 5$, 于是, 对 $m\geq 5$ 有

$$1!+2!+\cdots+m!\equiv 3 \pmod 5。$$

但 n^2 只能 $\equiv 0, \pm 1 \pmod 5$。因此 $m\geq 5$ 时方程无解。

[例 2-16] (第八届美国数学奥林匹克试题) 确定方程

$$\sum_{i=1}^{14} x_i^4 = 1599$$

的全部非负整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_{14})$ (不计排列次序)。

分析: 对于不定方程问题, 如果直接求解有困难, 不妨从反面考虑一下, 看是否能证明其无解。

注意到对整数 x, x^2 具有 $4k$ (x 为偶数) 和 $8k+1$ (x 为奇数) 的形式, 因此 x^4 具有 $16k$ 和 $16k+1$ 的形式, 从而我们考虑模 16 来证明方程无整数解。

解: 当 x 为偶数时, 显然

$$x^4\equiv 0 \pmod{16}$$

当 x 为奇数时, x^2 具有 $8k+1$ 的形式 (k 是整数), 所以

$$x^4=16k(4k+1)+1$$

即

$$x^4\equiv 1 \pmod{16}$$

这样, 任意整数的四次方对于模 16 只有 0, 1 两个可能值, 从而 $\sum_{i=1}^{14} x_i^4$ 对模 16 的所有可能值是 0, 1, 2, ⋯, 14 (唯独不能取 15), 但

$$1599=1600-1\equiv -1\equiv 15 \pmod{16},$$

因此原方程无解。

(4) 用于构造模周期数列解题

一个整数数列$\{a_n\}$,若存在常自然数 T,对一切自然数 n 都有

$$a_{n+T} \equiv a_n (\mathrm{mod}\, m)$$

恒成立,则称$\{a_n\}$为模 m 的周期数列。

构造模周期数列,在解题中可缩小研究范围,只须研究$\{a_n\}$被 m 除时所得余数的变化规律,便可帮助我们达到目的。构造模周期数列,关键是选择合适的模 m。

[**例** 2-17] (1988 **年全国高中联赛试题**) **已知** $a_1 = 1, a_2 = 2$。

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & a_n a_{n+1} \text{为偶数;} \\ a_{n+1} - a_n, & a_n a_{n+1} \text{为奇数。} \end{cases}$$

试证:对一切 $n \in N, a_n \neq 0$

分析:初步设想在数列项的奇偶性上打主意,但事与愿违。观察一些数列的具体项 1, 2, 7, 29, 22, 23, 49, …, **可以看出这些项中有奇数也有偶数,仅停留在数的奇偶性上不能奏效。于是转向构造模数列。取什么数为模呢? 注意到**

$$5a_{n+1} - 3a_n = 4(a_{n+1} - a_n) + a_{n+1} + a_n$$

于是 $$5a_{n+1} - 3a_n \equiv a_{n+1} + a_n (\mathrm{mod}\, 4)$$

这样就提醒我们选择模 4 可能较简单。

证明:由于 $5a_{n+1} - 3a_n \equiv a_{n+1} + a_n (\mathrm{mod}\, 4)$

因此有

$$a_{n+2} \equiv \begin{cases} a_{n+1} + a_n, & \text{当 } a_n a_{n+1} \text{ 为偶数时,} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{当 } a_n a_{n+1} \text{ 为奇数时。} \end{cases} (\mathrm{mod}\, 4)$$

下证 $a_{n+3} \equiv a_n (\mathrm{mod}\, 4)$。

由于在这数列中,任何相连的三项,不会出现均为奇数的情形,否则将与定义式的第二式矛盾,也不能出现偶,奇,偶这

种分布，否则将与第一式矛盾。因此，分三种情况讨论之。

(i) 设在 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 中，a_{n+1} 为偶数，那么

$a_{n+3} \equiv a_{n+2} + a_{n+1} \equiv a_n + a_{n+1} + a_{n+1} \equiv a_n + 2a_{n+1} \equiv a_n \pmod 4$

(ii) 设在 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 中，它们分别是偶，奇，奇这种分布，于是

$$a_{n+3} \equiv a_{n+2} - a_{n+1} \equiv a_{n+1} + a_n - a_{n+1} \equiv a_n \pmod 4$$

(iii) 如果 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 为奇，奇，偶这种发布，则 $a_{n+3} \equiv a_{n+2} + a_{n+1} \equiv a_{n+1} - a_n + a_{n+1} \equiv 2a_{n+1} - a_n \equiv 2(a_{n+1} - a_n) + a_n \equiv a_n \pmod 4$，这里须注意到 $a_{n+1} - a_n$ 为偶数。

综上有 $a_{n+3} \equiv a_n \pmod 4$。

因此，原数列模 4 之后，按 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, …周期地出现，不可能存在是 4 的倍数的项，当然更不可能有等于零的项。

[例 2-18]　(1989 年冬令营选拔赛试题) 数列 $\{V_n\}$ 定义如下：$V_0 = 0, V_1 = 1, V_{n+1} = 8V_n - V_{n-1} (n \in N)$。求证：$\{V_n\}$ 中没有形如 $3^\alpha \cdot 5^\beta (\alpha, \beta \in N)$ 的项。

证明：因为 $3 | 3^\alpha \cdot 5^\beta, 5 | 3^\alpha \cdot 5^\beta$，所以我们只要证明，如果存在 n，使得 $3 | V_n$，则一定有 $5 \nmid V_n$ 即可。但后者较难入手。通过观察数列前面一些项，我们转于证明：

$$3 | V_n \quad 7 | V_n$$

这里选择模 7 是解题的关键，可以通过试验获得。

因 $\{V_n\}$ 各项被 3 除时余数构成的数列：0, 1, - 1, 0, 1, - 1, …是一个以 3 为周期的周期数列，且 $3 | V_n \quad 3 | n (n \geq 0)$。

又 $\{V_n\}$ 各项被 7 除时余数构成的数列：0, 1, 1, 0, - 1, - 1, 0, 1, 1, 0, - 1, - 1, …是一个以 6 为周期的周期数列($n \geq$

0)

因此有 3©|V_n　7©|V_n, **即**$\{V_n\}$**中含有因子** 3 **的项一定含有因子** 7, **但** $3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ **含因子** 3 **而不含因子** 7, **命题获证。**

注: 例 2-18 中解法运用了一个常用的结论:“对于线性递推数列 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$, $a_1=a$, $a_2=b$, **若**$\{a_n\}$**的项都是整数, 则数列**$\{a_n(\mathrm{mod}\ m)\}$**一定是周期数列。”这个结论的证明是不难的, 留给读者练习。**

*[**例** 2-19]　(**第** 20 **届前苏联中学生竞赛题**)**证明: 在通项公式为** $a_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$ **的数列中, 有无限多个奇合数。**

证明: 为了构造周期数列, 我们考察 $n^n(n\in N)$**被** 3 **除余数构成的数列:**

$$1, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 0, \cdots$$

不难看出它是以 6 **为周期的周期数列。**

因此, 对任意的 $k\in N$, $\sum_{i=k}^{k+5} i^i\equiv 2(\mathrm{mod}3)$, **于是** $\sum_{i=k}^{k+35} i^i\equiv 0(\mathrm{mod}3)$。**从而对任意的自然数** j **和非负整数** p, **有**

$$a_{\overline{j+36p}}=a_j\quad(\mathrm{mod}3)\qquad(2\text{-}19\text{-}1)$$

又对任意的 $n\in N$, $n^n+(n+1)^{n+1}+(n+2)^{n+2}+(n+3)^{n+3}$**是偶数, 且** $a_1=1$ **为奇数, 所以** a_{4m+1}**均为奇数**$(m\geq 0)$。

数列$\{a_n\}$**的下标形如** $4m+1$ **的项中, 第一个被** 3 **整除的项是** a_{17}, **而** $36p+17=4(9p+4)+1$, **因此由**(2-19-1)**知**$\{a_n\}$**中形如** $a_{36p+17}(p=0, 1, 2, \cdots)$**的项都是能被** 3 **整除的奇合数, 显然它有无穷多个。**

(5) **用于构造剩余系解题**

同余关系是等价关系。因此, 根据某一特定的模 m, **利用同余关系, 可以把整数集** Z **划分成** m **个两两不相交的子集。**

为完整计,我们给出下面的定义:

定义 2.1 设 m 是一个正整数,把整数集 Z 划分为 m 个类:凡用 m 除所得的余数为 $r(0\leq r\leq m-1)$ 的归于同一类,记作 k_r,则 $k_0, k_1, \cdots, k_{m-1}$ 称为模 m 的剩余类。

根据剩余类的定义,下列性质是显然的:

① $Z=k_0\cup k_1\cup\cdots\cup k_{m-1}$, $k_i\cap k_j=\Phi$, 当 $i\neq j$ 时, $0\leq i<j\leq m-1$。

② 对任意的 $n\in Z$,有唯一的 k_r,使 $n\in k_r$。

③ 对任意的 $a, b\in Z$, $a, b\in k_r$ 的充要条件是 $a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$

定义 2.2 从模 m 的剩余类中每一类取一个数,这 m 个数所成的子集称为模 m 的一个完全剩余系。

模 m 的完全剩余系有无穷多个。但最常用的、使用较方便的是下面两种:

① $M=\{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$,这个完全剩余系称为 m 的非负最小完全剩余系。

② 当 $m=2k+1$ 时,取

$$M=\{-k, -(k-1), \cdots, -1, 0, 1, \cdots, k-1, k\}$$

当 $m=2k$ 时,取

$$M=\{-(k-1), -(k-2), \cdots, -1, 0, 1, \cdots, k\}$$

或 $M=\{-k, -(k-1), \cdots, -1, 0, 1, \cdots, (k-1)\}$

则 M 称为模 m 的绝对值最小完全剩余系。

对于完全剩余系,我们有下面的基本定理:

定理 2.4 m 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 作成模 m 的一个完全剩余系的充分必要条件是:当 $i\neq j$ 时, $a_i\not\equiv a_j(\mathrm{mod}\ m)$, $1\leq i<j\leq m$。

定理 2.5 设$(a, m)=1$, b是任意的整数, 若$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$是模$m$的一个完全剩余系, 则$ax_0+b, ax_1+b, \cdots, ax_{n-1}+b$也是模$m$的一个完全剩余系。

这两个定理的证明这里从略, 请读者参考有关的《初等数论》教材。

值得注意的是, 根据定理 2, 我们可以根据解题的要求, 选择合适的m, a, b和m的某一特殊完全剩余系$x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$, 从而构造出完全剩余系

$$ax_0+b, ax_1+b, \cdots, ax_{m-1}+b. \qquad (*)$$

完全剩余系$(*)$常有助于巧妙解出某些高水平的试题。

[例题 2-20] (第 26 届 IMO 预选题) 求 8 个数$n_1, n_2, \cdots, n_8$, 使具有性质: 对每一个整数k, 满足$-1985 \leq k \leq 1985$时, 可以找到 8 个整数$a_1, a_2, \cdots, a_8$, 使得$k=a_1n_1+a_2n_2+\cdots+a_8n_8$, 其中$a_1, a_2, \cdots, a_8$每一个都属于$\{-1, 0, 1\}$。

分析: 假定这样的$n_1, n_2, \cdots, n_8$已经找出, 为方便计, 先不妨假定它们都是正整数, 则一切形如

$$a_1n_1+a_2n_2+\cdots+a_8n_8 \qquad (2\text{-}20\text{-}1)$$

的数所组成的集合M中, 因每一个$a_i(i=1, 2, \cdots, 8)$都可取$-1, 0, 1$三个值, 故M中有3^8个数。其中最大和最小的数分别为

$$M_{max}=n_1+n_2+\cdots+n_8=N$$

$$M_{min}=-n_1-n_2-\cdots-n_8=-N$$

如果选择N, 使得$2N+1=3^8$, 则当M中的数对模$2N+1$两两不同余时, 则M就成为模$2N+1$的一个绝对值最小完全剩余系。当$N \geq 1985$时, 则任何满足$-1985 \leq k \leq 1985$的k都

将在 M 中，而 $N=\frac{3^8-1}{2}=\frac{3^8-1}{3-1}$，由等比数列的知识得知，只要将 $n_1, n_2, \cdots, n_8$ 分别取为 $1, 3, 3^2, \cdots, 3^7$ 便可。

解：令 M 是一切形如

$$k=a_1+a_2\cdot 3+a_3\cdot 3^2+\cdots+a_8\cdot 3^7 \quad (2\text{-}20\text{-}2)$$

的数所成的集，此处 $a_i\in\{-1, 0, 1\}$，$i=1, 2, \cdots, 8$。

显然 M 中共有 3^8 个数，其中最大的数与最小的数分别为

$$M_{max}=1+3+3^2+\cdots+3^7=\frac{3^8-1}{2}$$

$$M_{min}=-1-3-3^2-\cdots-3^7=-\frac{3^8-1}{2}$$

因为 M 中的任何两个数的差其绝对值都不超过 $\frac{3^8-1}{2}-\left(-\frac{3^8-1}{2}\right)=3^8-1$，故对模 3^8 两两不同余，因此，M 是模 3^8 的一个绝对值最小完全剩余系。从而任一整数 k，满足 $-\frac{3^8-1}{2}\leq k\leq\frac{3^8-1}{2}$ 时，都属于 M，即可表示成(2-20-2)的形式。注意到 $\frac{3^8-1}{2}=3280>1985$，因此 $n_1=1, n_2=3, \cdots, n_8=3^7$ 便是本题的解。

[例 2-21]　(第 12 届 IMO 试题)试确定具有下述性质的所有正整数 n，集合

$$M=\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

可以分成两个不相交的非空子集，使得一个子集中所有元素的积，等于另一个子集的所有元素之积。

分析：我们在 M 中补充一个数 n+6，则

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6 \tag{2-21-1}$$

是模 7 的一个完全剩余系。于是,我们就可以在模 7 上来讨论 n 的性质,而这是比较易于求解的。

解:在 M 中加进数 $n+6$,则 $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6$ 是模 7 的一个完全剩余系。假定有满足题设条件的 n 存在,分两种情况讨论:

① 若 $n+6 \not\equiv 0 \pmod 7$,则有 $a_i \in M$ 使 $a_i \equiv 0 \pmod 7$,于是 M 分成的两个子集的元素的积相等,记为 m,则 $m \equiv 0 \pmod 7$。因 7 是质数,故 M 中必须另有一个 $a_j \neq a_i$,使 $a_i \equiv a_j \equiv 0 \pmod 7$,这是不可能的。

② 若 $n+6 \equiv 0 \pmod 7$,则令 M 分成的两个子集的元素的乘积为 m,便有

$m^2 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \equiv 720 \equiv -1 \pmod 7$

但 $m^2 \equiv 1, 4, 2 \pmod 7$,矛盾。

综合①,②证明了满足题设条件的 n 不存在。

[例 2-22] (第 26 届 IMO 试题)设 n 为正整数,整数 k 与 n 互质,且 $0 < k < n$。令 $M = \{1, 2, \cdots, n-1\}$,给 M 中每个数都染上黑白两种颜色的一种,染法满足如下规则:

① 对任一 $i \in M$,i 与 $n-i$ 同色;

② 对任一 $i \in M$,若 $i \neq k$,i 与 $|k-i|$ 同色。

求证:M 中所有的数必为同色。

分析:由染色规划②易见,$2k$ 与 $|k-2k| = k$ 同色,$3k$ 与 $|k-3k| = 2k$ 同色,$\cdots$,于是,我们猜想

$$k, 2k, \cdots, (n-1)k \tag{2-22-1}$$

中的数都同色，在 M 中加上 0 后，恰好为 n 的一个非负最小完全剩余系，从而在(2-22-1)中加上 0 后也是 n 的一个完全剩余系。所以，我们试从构造完全剩余系来解此题。

解：因为 $(n, k) = 1$，并且 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 是模 n 的一个完全剩余系，所以

$$0, k, 2k, \cdots, (n-1)k$$

也是模 n 的一个完全剩余系。记 $ik \equiv a_i \pmod{n}$，此处 $0 \leq a_i \leq n-1$，则

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\} = \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

从而 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\} = \{1, 2, \cdots, n-1\} = M$

对于一切的 $1 \leq i \leq n-2$，我们有

$$a_{i+1} - a_i \equiv (i+1)k - ki \equiv k \pmod{n}$$

又因为 $0 < a_i < n$，$0 < a_{i+1} < n$，故必有 $a_{i+1} = a_i + k$ 或 $a_{i+1} = a_i + k - n$。

若 $a_{i+1} = a_i + k$，则 $a_i = a_{i+1} - k = |a_{i+1} - k| = |k - a_{i+1}|$，由规则②，$|k - a_{i+1}|$ 与 a_{i+1} 同色，即 a_{i+1} 与 a_i 同色。

若 $a_{i+1} = a_i + k - n = |a_i + k - n| = |k - (n - a_i)|$，由规则②，$a_{i+1}$ 与 $n - a_i$ 同色，再由规则①，$n - a_i$ 与 a_i 同色，故也有 a_{i+1} 与 a_i 同色。

综上，对一切 $1 \leq i \leq n-2$，a_{i+1} 都与 a_i 同色，顺次令 $i = 1, 2, \cdots, n-2$，即得证。

(6) 用于解决一些实际问题

[例 2-23]　(美国第 19 届数学奥林匹克试题) 某州颁布由 6 个数字组成的车牌证号(由 0～9 的数组成)，该州规定任何两个牌号至少有两个数字不同(因此证号 027592 和 020592 不能都被使用)。试决定车牌证号最多可颁布多少个，

请给出证明。

解:该州最多可颁布 10^5 个证号。

对满足条件的车牌证号的数字可以采用下面的一种做法。

对每一个 5 位数节 $x_1x_2x_3x_4x_5$,我们用同余式

$$x_6 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \pmod{10}$$

决定 x_6。

对于两个不同的 5 位数节 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 和 $b_1b_2b_3b_4b_5$,若其中至少有两个数位 $1 \leq i, j \leq 5$,使得 $a_i \neq b_i$, $a_j \neq b_j$,这时,$a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 和 $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$ 至少有两个数字不同,可表示不同的车牌号;若其中仅有一个数位 $1 \leq j \leq 5$,使得 $a_j \neq b_j$,这时

$$a_6 - b_6 \equiv (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)$$
$$= a_j - b_j \not\equiv 0 \pmod{10}$$

因此 $a_6 \neq b_6$,所以 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 和 $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$ 至少有两个数字不同,表示不同的牌号。

由于用 0, 1, 2, …, 9 这十个数字组成不同的 5 位数节共有 10^5 个,于是任何两个按上面作法构造的六位数至少有两个数字不同,且共有 10^5 个,因此可颁发 10^5 个牌号。

若有大于 10^5 个牌号,则至少有两个牌号的前 5 位相同,因而它们只可有一个数字不同,不符合该州规定。

[例 2-24] (1990 年冬令营选拔试题)设有两个完全相同的齿轮 A, B。B 被平放在一个水平平面上, A 放在 B 的上面并使两者完全重合(从而两者在水平面上的投影完全重合),然后任意去掉四对重合的齿。如果两齿轮各原有 14 个齿,试问:能否将齿轮 A 绕两齿轮的公共轴旋转一个适当的位置,使得两齿轮在水平面的投影合为一个完整齿轮的投影?

如果两齿轮各原有 13 个齿,又是怎样的呢?请证明你的论断。

解:原命题等价于:a_1, a_2, a_3, a_4 为 1, 2, …, 14 中的 4 个不同的数,是否存在正整数 k,使得 $a_i + k \equiv a_j \pmod{14}$ $(1 \leq i, j \leq 4)$。

若存在,则在原命题中,只须将 A 轮,B 轮的齿轮标上 1, 2, …, 14,设去掉的四个齿的标号为 a_1, a_2, a_3, a_4。将 A 轮转 k 齿后,A 轮上 a_1, a_2, a_3, a_4 所在位置对应 B 轮的齿均设有被去掉,所以投影为一个完整的齿轮。

若不存在这样的 k,则在原命题中,无论怎么转,a_1, a_2, a_3, a_4 中的某一齿后的位置上对应的 B 轮的齿也有去掉的,所以投影不完全。

可见上述两命题等价。

设 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 14$,则 a_i 间的两两之差只有 $P_4^2 = 12$ 种,对 14 的非零剩余类 $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \cdots, \overline{13}$ 中必有某个 $\overline{k_0}$ 与 a_i 中两两差关于模 14 的交为空集,则转 k_0 齿即满足条件,故有 14 个齿时命题成立。

当两个齿轮各有 13 齿时,不存在那样的旋转,只需取 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 8$,则 $a_i - a_j$ $(i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4)$ 取遍了 $\overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{12}$,这 12 个模为 13 的非零剩余类,故有 13 个齿时命题不成立。

习 题 2.2

1. 数 777^{777} 的末位数字是多少?

2. 在一个自然数的十进制表示法出现数字 1, 3, 7 和 9。证明:交换数字后,可以得到一个能被 7 整除的十进制数。(1975 年波兰数学竞赛试题)

3. 设 m, n 为正整数, 证明: 存在与 m, n 无关的常数 $\alpha > 1$, 使得当 $\frac{m}{n} < \sqrt{7}$ 时, $7 - \frac{m^2}{n^2} \geq \frac{\alpha}{n^2}$, 问最大的 α 值是多少? (1989 年瑞典数学竞赛试题)

4. 在小于 10^4 的正整数中, 有多少个正整数 n, 可使 $2^n - n^2$ 被 7 整除。(第 6 届莫斯科竞赛试题)。

5. 设 a_n 是 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 的个位数字, 试证: $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 是有理数(1984 年全国高中联赛试题)。

2.3 无穷递降法

何谓无穷递降法呢? 先看一个简单例子的一个有趣的证明。

[例 2-25] 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

证明: 设 $\sqrt{2}$ 不是无理数, 那么存在自然数 a, b 满足方程 $x^2 = 2y^2$, 即 $a^2 = 2b^2$, 易知 a 是偶数。设 $a = 2a_1$, 代入方程中得 $b^2 = 2a_1^2$, 不难看出 $b < a$, $a_1 < b$, 并且 b 是偶数。设 $b = 2b_1$ 又可得到 $a_1^2 = 2b_1^2$, 并且 $b_1 < a_1$。我们可以进一步同样求得比 a_1, b_1 还小的 a_2, b_2 满足方程。这样可以一直无止境地推下去, 得到一系列自然数 $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ 满足方程, 并且 $a > b > a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots$, 而自然数的无穷递降序列是不可能存在的, 这是一个矛盾。从而证明了 $\sqrt{2}$ 是无理数。

以上这一证明是按这样的模式进行的: 假设要证的命题不成立, 在此基础上, 设法构造某个无穷递降过程, 但从问题本身看, 这个过程应当是有限的, 从而产生了矛盾, 肯定了原命题的正确性。这种证明问题的方法叫无穷递降法。

无穷递降法从本质上讲是一种用反证法表现的特殊形式的数学归纳法。17 世纪数学家费尔马首先利用这个方法证明了不定方程 $x^4+y^4=z^4$ 没有非平凡的整数解。在数学竞赛中，无穷递降法是一种十分常用的方法，特别是近几年的 IMO 试题中，每年都有可以用无穷递降法求解的试题。

下面通过实例阐明使用无穷递降法的两种常用形式。

1. 普通形式——构造无穷递降过程法

构造无穷递降过程的方法多种多样，较常见的有以下几种：

(1) 构造无穷递降整数列(或子列)

众所周知，如果一个整数能被任意大的数整除，那么这个数只能等于零，利用这一特性，构造无穷递降整数序列可使问题获解。

[例 2-26]　(1990 年意大利数学竞赛试题) 若干个球分布在 $2n+1$ 个袋中，如果任意取走一个袋，总可以把剩下的 $2n$ 个袋分成两组，每组 n 个袋，并且这两组的球的个数相等。证明：每个袋中的球的个数相等。

分析：用数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 分别表示这 $2n+1$ 个袋中球的个数。显然，$a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 是非负整数。不妨设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2n+1}$。于是问题转化为："有 $2n+1$ 个非负整数，如果从中任意取走一个数，剩下的 $2n$ 个数可以分成两组，每组 n 个，其数字和相等。证明这 $2n+1$ 个数全相等。"

下证这个转化后的命题。

因为 $2 \mid (a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1})-a_i$，$i=1, 2, \cdots, 2n+1$。所以 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 具有相同的奇、偶性。易知把它们都减去 a_1 后

所得的 $2n+1$ 个数。

$$0, a_2-a_1, a_3-a_1, \cdots, a_{2n+1}-a_1$$

也满足题意。因 a_i-a_1 都是偶数,

$$0, \frac{a_2-a_1}{2}, \frac{a_3-a_1}{2}, \cdots, \frac{a_{2n+1}-a_1}{2}$$

这 $2n+1$ 个数也满足题意, 按上法且知也都是偶数。把它们再都除以 2, 让这个过程进行下去, 我们就得到对任意大的自然数 s,

$$0, \frac{a_2-a_1}{2^s}, \frac{a_3-a_1}{2^s}, \cdots \frac{a_{2n+1}-a_1}{2^s}$$

这 $2n+1$ 个数也满足题意, 且都是偶数。这是不可能的, 除非

$$a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}$$

所以, 每个袋中的球的个数相等。

[例 2-27] (美国第五届数学竞赛试题) 确定(并证明) 方程 $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$ 所有的整数解。

解: 数组 $x_0=y_0=z_0=0$ 显然是该方程的整数解。今设方程还存在非零整数解(a, b, c), 则方程的右边部分 a^2b^2 必被 4 整除。事实上, 若不然, 则 a, b, 均为奇数, 由此得

$$a^2\equiv1(\mathrm{mod}4), b^2\equiv1(\mathrm{mod}4) \quad a^2b^2\equiv1(\mathrm{mod}4)$$

这时若 c 是偶数, 则

$$a^2+b^2+c^2=2(\mathrm{mod}4);$$

若 c 为奇数, 则

$$a^2+b^2+c^2\equiv3(\mathrm{mod}4)$$

均使 $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$ 不能成立。

又注意到, 方程左边部分被 4 整除, 当且仅当 a, b, c 均为偶数。否则, 左边部分被 4 除, 所得的余数恰等于 a, b, c 中奇

数的个数。

今记 $a=2a_1, b=2b_1, c=2c_1$，代入原方程并整理得

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=4a_1^2b_1^2$$

同理可证 a_1, b_1, c_1 均为偶数，记 $a_1=2a_2, b_1=2b_2, c_1=2c_2$，则有

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2=16a_2^2b_2^2$$

重复以上过程，便得无穷序列

$$a, a_1, a_2, \cdots; b, b_1, b_2, \cdots; c, c_1, c_2, \cdots$$

由于(a, b, c)是非零数组，例如设 $a\neq 0$，则有无穷递降的正整数序列$|a|, |a_1|, |a_2|, \cdots$，这显然是不可能的。

因此原方程有唯一一组整数解$(0, 0, 0)$。

[例 2-28]　(第五届全国中学生冬令营试题)设 a 是给定的正整数，A, B 是两个实数，试确定方程组

$$x^2+y^2+z^2=(13a)^2$$

$$x^2(Ax^2+By^2)+y^2(Ay^2+Bz^2)+z^2(Az^2+Bx^2)=\frac{1}{4}(2A+B)(13a)^4$$

有正整数解的充分必要条件(用 A, B 的关系式表示，并予以证明)。

解：将第一式平方乘以$\frac{1}{2}B$ 减去第二式，得

$$\left(A-\frac{1}{2}B\right)(x^4+y^4+z^4)=\frac{1}{2}\left(A-\frac{1}{2}B\right)(13a)^4 \qquad (2\text{-}28\text{-}1)$$

若 $A\neq\frac{1}{2}B$，则(2-28-1)式等价于

$$2(x^4+y^4+z^4)=(13a)^4 \qquad (2\text{-}28\text{-}2)$$

设原方程组有整数解(x, y, z)，则 x, y, z 满足(2-28-2)，显然 a 必为偶数，令 $a=2a_1$，则(2-28-2)式等价于

$$x^4+y^4+z^4=8(13a_1)^4 \qquad (2\text{-}28\text{-}3)$$

由(2-28-3)可知 x, y, z 必须全为偶数。令 $x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1$，则

$$2(x_1^4+y_1^4+z_1^4)=(13a_1)^4$$

故 a_1 又必为偶数，令 $a_1=2a_2$，类似地可推知 x_1, y_1, z_1 也全为偶数，令 $x_1=2x_2, y_1=2y_2, z_1=2z_2$，则

$$2(x_2^4+y_2^4+z_2^4)=(13a_2)^4$$

显然 $x_1>x_2, y_1>y_2, z_1>z_2$。应用上述推导过程可得无穷正偶数序列：

$$x_1>x_2>\cdots; y_1>y_2>\cdots; z_1>z_2>\cdots$$

这显然是不可能的。

这就证明了当 $A\neq\frac{1}{2}B$ 时，原方程组无正整数解。

如果 $A=\frac{1}{2}B$，当 $A=B=0$ 时，方程组第二式为恒等式；当 $B\neq0$ 时，第二式等价于

$$(x^2+y^2+z^2)^2=(13a)^4$$

无论哪种情况，如果(x, y, z)满足方程组第一式必须满足第二式，从而方程组显然有解 $x=3a, y=4a, z=12a$。

故原方程组有解的充要条件是 $A=\frac{1}{2}B$。

(2) 目标函数法

某些命题要求证明或可转化为证明某种步骤只能进行有限次，我们常将每一步骤与一个取正整数值的函数相对应。然

后证明对应的函数值至少比前一步对应的函数值减少 1, 由于第一步所对应的函数值是有限数, 函数值下降的过程不能无限制地继续下去, 必然在有限步后终止。

[例 2-29] (第 27 届 IMO 试题) 正五边形的每个顶点对应着一个整数, 使得这五个整数的和为正。若其中三个相连顶点相应的整数依次为 x, y, z, 而中间的 $y< 0$, 则要进行如下的操作: 整数 x, y, z 分别换为 $x+ y, - y, z+ y$, 只要所得的五个整数至少还有一个为负时, 这种操作就继续进行。问是否这种操作进行有限次后必定终止。

解: 设五个顶点上的数顺次为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 并令

$$S= x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5> 0$$

显然, 在进行题设的操作时, S 不改变。作目标函数:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)= (x_1- x_3)^2+ (x_2- x_4)^2+ (x_3- x_5)^2 + (x_4- x_1)^2+ (x_5- x_2)^2$$

不妨设 $x_1< 0$, 则$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$在一次操作后成为$(- x_1, x_1+ x_2, x_3, x_4, x_5+ x_1)$, 目标函数值的改变量为:

$$f(- x_1, x_1+ x_2, x_3, x_4, x_5+ x_1)- f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$= 2x_1(x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5)= 2x_1S< - 2$$

这表明, 每经一次操作, 目标函数 f 的值至少下降 2, 但 $f \geq 0$, 故操作只能进行有限次即将终止。

有时候,“递降”过程实际上表现为目标函数是递增的, 要注意灵活运用。

[例 2-30] (第 24 届莫斯科奥林匹克试题) 在 $m\times n$ 的方格表的每个格子中都填上一数, 允许同时改变某一行或某一列的数的符号。证明: 只要经过有限次的这种改变, 即可使每一行, 每一列各数之和都非负。

解：我们来改变其和为负值的每一行、每一列的符号，并称之为“操作”，这时表中所有各数之和 S（实际上就是目标函数）在每一次变号后都是上升的，并且 S 所增加的值不等于零且不无限制增大（这种增加量只能取有限中不同的值），因此，它必在某一时刻达到最大值，而一旦它不能再增加时，表中每一行与每一列各数都非负了。

［例 2-31］　在坐标平面上，如果点（x_0，y_0）的坐标 x_0，y_0 都是整数，那么称该点为整点。试证：在坐标平面上，不存在正 n 边形（$n\geq 7$），使其各顶点都是整点。

分析：我们用构造图形的方法来建立一个无穷递降过程，并将目标函数选为图形中的“度量”量。

证明：假设有正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$（$n\geq 7$），其各顶点 A_1，A_2，…，A_n 都是整点，这时，在坐标平面上再另取一整点 O，从 O 点出发，作 OB_1 矽 A_1A_2，OB_2 矽 A_2A_3，…，OB_n 矽 A_nA_1（如图 2.1 所示）

因为 A_1，A_2，…，A_n 都是整点，O 是整点，所以 B_1，B_2，…，B_n 都是整点，且 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 是正 n 边形，易算得边长

$$\overline{B_1B_2}=2\overline{B_1C}=2(\overline{A_1A_2})\sin\frac{\pi}{n}<2(\overline{A_1A_2})\sin\frac{\pi}{6}=\overline{A_1A_2}$$

这就是说在原来的正 n 边形的基础上，可以作出一系列正 n 边形，而且边长不断减小，当然边长的平方（目标函数）也在不断减小，但整点正 n 边形的边长的平方是整数，不能无限减小的，矛盾。故不存在正 n 边形（$n\geq 7$）使其各顶点都是整点。

2. 变形形式——最小元素法

无穷递降法的另一种变形形式是——直接在论证表述过

图　2. 1

程中用最小数原理。这种变形形式我们简称为最小元素法。

值得注意的是, 上面提及的普通形式和变形形式的实质是一样的, 从理论上说, 它们都依赖于一个基本的事实, 即自然数的最小数原理。差别仅在于两者的论证表述不同。尽管如此, 有些问题选用最小元素法来表述, 书写简单得多。

[例 2-32]　证明: 四元二次不定方程 $x^2+y^2=3(u^2+v^2)$ 不存在正整数解。

分析: 设方程有正整数解, 在方程的正整数解集中, 考虑使 x^2+y^2 最小的一组解, 设为 (x_1, y_1, u_1, v_1), 则

$$x_1^2+y_1^2=3(u_1^2+v_1^2)$$

若 $3\nmid x_1$ 或 $3\nmid y_1$, 则 $x_1^2+y_1^2\equiv 1, 2 \pmod 3$, 但显然有 $3\mid x_1^2+y_1^2$, 矛盾。因此 $3\mid x_1$ 且 $3\mid y_1$。

设 $x_1=3x_2$, $y_2=3y_2$, 原方程化为

$$u_1^2+v_1^2=3(x_2^2+y_2^2)$$

即(u_1, v_1, x_2, y_2)也是原方程的一组解。

但$u_1^2+v_1^2<x_1^2+y_1^2$,这与$x_1^2+y_1^2$的最小性矛盾。

所以,原方程没有非零整数解。

请读者用无穷递降法的普通形式表述此题的论证。

[例 2-33] (第 29 届 IMO 试题)设 a, b 为自然数,并且 $ab+1$ 整除 a^2+b^2,求让$(a^2+b^2)/(ab+1)$是某个正整数的平方。

分析 1:设 $k=\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$,即

$$a^2+b^2=k(ab+1) \qquad (2\text{-}33\text{-}1)$$

如果放宽限制,允许 b 为任何非负整数,那么对于 $b=0$ 的特殊情形,显然有 $k=a^2$。由特殊情形得到启示,对于一般情形,

$$a \geq b>0 \qquad (2\text{-}33\text{-}2)$$

我们应该设法通过递降手续,寻求 k 的类似于(2-33-1)那样的表达式,使得其中某一个数变为 0。为此,将(2-33-1)式变形为

$$b^2+a(a-kb)=k \qquad (2\text{-}33\text{-}3)$$

$$b^2(a-kb)^2=k[1-b(a-kb)]$$

$$b^2+(kb-a)^2=k[b(kb-a)+1]$$

令 $c=kb-a$ 可将上面最后一式写成

$$b^2+c^2=k(bc+1) \qquad (2\text{-}33\text{-}4)$$

下面考察能否有

$$0 \leq c<b \qquad (2\text{-}33\text{-}5)$$

从(2-33-4)式可以看出,若 $c<0$,则 $bc\leq -1$,必有 $k(bc+1)\leq 0$,但这是不可能的(与(2-33-2)式矛盾)。因此 $c\geq 0$。另一方面,由(2-33-3)式可以看出

$$c=kb-a=\frac{b^2-k}{a}<\frac{b^2}{a}\leq b.$$

这样,我们从(2-33-1)和(2-33-2)出发,通过递降手续得到了(2-33-4)和(2-33-5)。如果 c 仍大于 0,则可继续施行类似的手续。直至最后得到所要求的结果。

分析 2:设 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k$, k 不是完全平方数,讨论不定方程

$$a^2-kab+b^2=k \qquad (2\text{-}33\text{-}6)$$

显然,这个不定方程的解(a,b)不会使 $ab<0$,否则 $-ab\geq 1$,由(2-33-6)易导出 $a^2+b^2\leq 0$。

设(a,b)是(2-33-6)的解中适合 $a>0$, $b>0$ 且使 $a+b$ 最小的那个解,设 $a\geq b$,固定 k 与 b,把(2-33-6)式看成 a 的二次方程,它有一根为 a,设另一根为 a',由根与系数的关系可知

$$a+a'=kb \qquad (2\text{-}33\text{-}7)$$

$$aa'=b^2-k \qquad (2\text{-}33\text{-}8)$$

由(2-33-7)知 a' 为整数,由(2-33-8)知 $a'\neq 0$,否则 k 为平方数,与假设不合。由于 $a>0$,故知 $a'>0$,这时有

$$a'=\frac{b^2-k}{a}\leq\frac{b^2-1}{a}\leq\frac{a^2-1}{a}<a$$

这时,(a',b)为(2-33-6)的解,$a'>0$, $b>0$,但 $a'+b<a+b$,与 $a+b$ 的最小性矛盾。所以 k 必为平方数。

上面分析 1 的思路较自然,分析 2 的思路较灵巧。但它们的本质是一样的,应悉心领会。

最后,来看《美国数学月刊》上的一道征解题(E 2909)。我们用无穷递降法给出了这道难题的一个有趣的证明。

[例 2-34]　设非负实数的集合 S 具有性质:对任何 $x, y\in S$ 有 $x+y\in S$ 或 $|x-y|\in S$,则称 S"对加运算或减运算是

闭的”。例如，对 $\alpha>0$ 和非负整数 n，集合 $S(n,\alpha)=\{0,\alpha,2\alpha,\cdots,n\alpha\}$ 具有这一性质。证明：如果有一个非空的非负实数的有限集对加或减运算是闭的，且不是 $S(n,\alpha)$ 的形式，则它一定有且只有四个元素。

证明：设 S 是对减运算闭的非空有限集，取 $x\in S$，则 $0=x-x\in S$，因此 S 一定包括 0 元。

要 S 不是 $S(n,\alpha)$ 的形式，显然 S 中还有非零元。再注意到集 S 对减运算是闭的，则对任何的实数 r，rS（将 r 乘 S 中的每一个元）也对减运算是闭的，因此可设 S 中的非零元以 1 作为最小元素。

以 $S\neq S(1,1)=\{0,1\}$，因此 S 还有异于 0，1 的元。设 M 是集合 S 的最大元，$M\neq 1$，这时 $M-1\in S$，因为 1 是 S 的最小元，所以区间 $[M-1,M]$ 上除了 $M-1$，M 外没有了 S 中的其他元。

现假定 $z\in S$ 且满足 $1<z<M-1$，这时有 $M-1-z\in S$，由此便得 $z+1=M-(M-1-z)\in S$，这样进行下去，因 S 是一有限集，我们总可得到正整数 t 使得 $z+t=M-1$。又对这样的 z，注意 $M-z\in S$，因此 $z-1=(M-1)-(M-z)\in S$，这样递降下去，因 S 是一有限集，1 为其最小元，因此我们总可找到一个正整数 u 使得 $z-u=1$，这时 $z=1+u$ 为正整数。这说明，如果存在 z 满足 $1<z<M-1$，$z\in S$，则 z 一定是正整数，$M=z+t+1=u+t+2$ 也为正整数，此时一定有 $S=S(M,1)$，矛盾。

上面论证说明要 S 对减运算是闭的且不具有 $S(n,\alpha)$ 的形式，S 一定要且有形式 $\{0,1,M-1,M\}$。反之，当 $M\neq 3$ 时，具有形式 $\{0,1,M-1,M\}$ 的集合一定满足对加运算闭且不是

$S(n, q)$的形式。至此,命题得证。

注:例 2-34 运用了递降(或递增)过程来达到最小值(或最大值)的方法来解题,这是一种常用的解题思路。

习 题 2.3

1. 证明方程 $x^2+y^2+z^2=2xyz$ 没有自然数解。

2. 已知 $f(x)$是定义在 N 上又在 N 上取值的单调递增函数,且对任何 $m\in N$ 有 $f(2^m)=2^m$,证明 $f(x)=x$ 在 N 上恒成立。

3. 一群小孩围坐一圈分糖果,老师让他们先每人任取偶数块,然后按下列规则调整:所有的小孩同时把自己的糖分一半给右边的小孩,糖的块数变成奇数的人,向老师补要一块。证明:经过有限次调整就可使大家的糖果变得一样多(北京市 1962 年竞赛试题)。

4. 已知 $n>2$,求证:如果 k^2+k+n 对于整数 k, $0\le k\le\sqrt{\frac{n}{3}}$,是质数,则 k^2+k+n 对所有的整数 k, $0\le k\le n-2$,都是质数(第 28 届 IMO 试题)。

2.4 递 推 方 法

一个数列连续项之间的关系叫递归关系。通过建立递归关系解决问题的方法,称之为递推方法。

在处理一些与自然数有关的复杂的计数问题时,常常难以直接得到结果。这时,借助递推方法,即通过研究程序或步骤之间的相依关系可帮助我们简捷地获得结果。

利用递推方法解题的一般步骤为:(1)确定初始值;(2)建立递归关系;(3)解递归关系。而第二步骤发现和建立递归关系,往往是递推方法运用的关键,下面将通过实例分类予以介

绍。至于解递归关系(方程),由于众多资料上都有详细介绍,这里假定读者为已知,不予介绍。

1. 增量方法

[例 2-35] 一块黄铜平板上装着三根金刚石细柱,其中一根细柱上套着 64 个大小不等环形金盘,大的在下,小的在上。如图 2.2 所示,这些盘子可一次一个地从一根柱子转移到另一根柱子,但不允许较大盘子放在较小盘子的上面。若把这 64 个金盘从一根柱子全部转移到另一根柱子上,至少须移动多少次?

图 2.2

这是一个古老的数学游戏。据说古代印度婆罗门教寺庙内的僧侣们玩着这一称为'河内宝塔问题'的游戏。认为如果一场游戏能玩到结束,就意味着世界末日的来临。

分析:用 a_n 表示将 n 个盘子从一根柱子移到另一根柱子所必须移动的次数,显然有 $a_0=0, a_1=1$。

对于 n 个盘子,先把柱子 A 上的 $n-1$ 个盘套到柱子 C 上而且保持相对位置不变,这需要 a_{n-1}次,再把柱子 A 上的最大的盘套到 B 上,用 1 次,然后再把 C 上的盘按要求套到 B 上,还须用 a_{n-1}次,所以有

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad (2\text{-}35\text{-}1)$$

由(2-35-1)得 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)=\cdots=2^n(a_0+1)$

所以 $a_n=2^n-1$

回到原问题，$n=64$，故至少移动 $2^{64}-1$ 次，这说明一个人若用手工移动，几辈子也难完成。

[例 2-36]　球面上有 n 个大圆，任意三个大圆不共点，可将球面分成几部分？

解：设 n 个大圆可将球面分成 a_n 个部分，$n=1$ 时，一个大圆将球面分成两部分，所以 $a_1=2$。一般地，设 $n-1$ 个大圆将球面分成 a_{n-1} 部分，增加一个大圆，它与前 $n-1$ 个大圆都有交点，共 $2(n-1)$ 个交点，这些交点将新增大圆周分成 $2(n-1)$ 段，每一段都将其所在的球面部分分成两部分，所以

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

故
$$a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = 2\sum_{k=2}^{n}2(k-1)$$
$$= 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2。$$

2. 分类法

建立递归关系，常常要借助分类来完成。

[例 2-37]　n 边形的边依次记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，每条边都涂以红、黄、绿三种颜色中的一种，要使相邻两边的颜色互不相同，有多少种不同的涂色方法。

解：先对 a_1 边涂色，有 3 种涂法。再对 a_2 边涂色，因为 a_2 边与 a_1 边不同色，所以对 a_2 边有 2 种涂法。同样，对 $a_3, a_4, \cdots a_{n-1}, a_n$ 边都有 2 种涂法。这样共有 $3\times 2^{n-1}$ 种涂法。

但这种涂法只能保持 a_i 与 a_{i+1} 不同色 $(i=1, 2, \cdots, n-1)$，但不能保证 a_1 与 a_n 不同色。

于是，这样的涂法可分为两类：一类是 a_n 与 a_1 不同色的涂法，这是符合题设条件的对 n 边形的涂法，记为 S_n 种。另一

类是 a_n 与 a_1 同色的涂法, 这时可把 a_n 与 a_1 看成一条边, 这种涂法相当于对 $n-1$ 边形符合题设条件的涂法, 即为 S_{n-1} 种。这样就有

$$S_n + S_{n-1} = 3\times 2^{n-1}$$

解之得 $S_n = 2^n + 2(-1)^n$, 此即为所求的涂色方法数。

[例 2-38]　(1988 年国家集训队试题) 所有的项都是 0 或 1 的数列称为 0, 1 数列。设 A 是一个有限的 0, 1 数列, 以 $f(A)$ 表示在 A 中把每个 1 都改为 0, 1, 每个 0 都改为 1, 0 所得到的 0, 1 数列。例如 $f(1, 0, 0, 1) = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$, 并以 $f^n(A)$ 表示 $f(f\cdots f(A)\cdots)$ (n 个 f)

试问, 在 $f^n((1))$ 中, 连续两项是 0 的对子有多少个?

解: 设 $f^n((1))$ 中连续两项是 0, 0 的数对个数记为 g_n, 连续两项是 0, 1 的数对个数为 h_n。

依题设, $f^n((1))$ 中的 0, 0 数对仅能由 $f^{n-1}((1))$ 中的 0, 1 数对经变换 f 而得到。

又 $f^{n-1}((1))$ 中 0, 1 数对的来源可分为两类: 一类来源于 $f^{n-2}((1))$ 中 1 经过变换 f 而得; 另一类来源于 $f^{n-2}((1))$ 中的 0, 0 数对经过变换 f 而得到。由于 $f^{n-2}((1))$ 共有 2^{n-2} 项, 其中恰有一半是 1, 所以

$$g_n = h_{n-1} = 2^{n-3} + g_{n-2}$$

经迭代可得

$$g_n = 2^{n-3} + 2^{n-5} + \cdots + \begin{cases} 2^0 + g_1, & 2\nmid n \\ 2^1 + g_2, & 2\mid n \end{cases}$$

其中 $g_1 = 0$, $g_2 = 1$, 所以

$$g_n=\begin{cases}\dfrac{2^{n-1}-1}{3}, & 2\nmid n\\[2ex] \dfrac{2^{n-1}+1}{3}, & 2\mid n\end{cases}$$

即
$$g_n=\frac{1}{3}[2^{n-1}+(-1)^n]$$

[例 2-39]　(1989 年加拿大竞赛试题)整数 1, 2, …, n 的排列满足:每个数或者大于它之前的所有数,或者小于它之前的所有数,试问有多少这样的排列。

解:设满足题设条件的排列个数为 a_n,则 $a_1=1$。当 $n\geq 2$ 时,根据数 n 所排的位置对满足题设条件的排列进行分类。若数 n 排在第 i 位,则称为第 i 类($i=1, 2, \cdots, n$),这样满足条件的排列分为了 n 类。

对第 i 类,由于数 n 排在第 i 位,据题意,第 i 位之后的所有数必须小于第 1 位至第 i 位的所有数且按递降顺序排列,因此完全确定,只能是 $n-i, n-i+1, \cdots, 1$。而第 i 位之前的 $i-1$ 个数有 a_{i-1} 种排法。因此第 i 类的排列个数为 a_{i-1}。

所以所求的排列数为

$$a_n=1+a_1+\cdots+a_{n-1}\qquad(2\text{-}39\text{-}1)$$

由(2-39-1)易归纳出:$a_n=2^{n-1}$。

[例 2-40]　(1989 年前捷克斯洛伐克竞赛试题)将一个 $2\times n$ 个方格的带形的某些格中染上颜色,使得任何 2×2 的方格中都没有完全染上颜色,以 P_n 来记所有满足条件的不同染色法的数目。求证:P_{1989} 能被 3 整数,并求能整除 P_{1989} 的 3 的最高次幂。

分析:首先建立 P_n 的递归关系,然后用这个递归关系来证明和求解题中的结论。这是解决本题的基本思路。

解: 对最后两格的染色情形进行分类, 若最后两格只染色一格或完全没有染色, 据题意, 前面的 $2\times(n-1)$ 个方格只要按题设要求染色便可, 因此, 这时共有染色方法数为 $3P_{n-1}$。

若最后两格全部染色, 与它相邻的前面两格只能染一格或不染色, 再前面的 $2\times(n-2)$ 个方格只要按题设要求染色便可。因此, 这时共有染色方法数为 $3P_{n-2}$。

故有 $P_n=3(P_{n-1}+P_{n-2})$ (2-40-1)

又容易得到 $P_1=4$, $P_2=15$, 于是由(2-40-1) 及运用数学归纳法不难证得 $P_n(n\geq 3)$ 是 3 的整数倍, 特别地, P_{1989} 是 3 的倍数。

由于 P_1 不是 3 的倍数, P_2 是 3 的倍数, 从而 P_3 是 3 的倍数但不是 9 的倍数, P_4 是 9 的倍数可以猜想

$$3^{k-1} \mid P_{2k-1},\ 3^{k} \nmid P_{2k-1},\ 3^{k} \mid P_{2k} \qquad (2\text{-}40\text{-}2)$$

以下施行数学归纳法。

首先如上述 $k=2$ 时, (2-40-2) 成立, 假设 $k=m$ 时(2-40-2) 成立, 则当 $k=m+1$ 时, 由(2-40-1) 得

$$P_{2m+1}=3(P_{2m}+P_{2m-1}) \qquad (2\text{-}40\text{-}3)$$

$$P_{2(m+1)}=3(P_{2m+1}+P_{2m}) \qquad (2\text{-}40\text{-}4)$$

利用归纳假设及(2-40-3) 和(2-40-4) 不难证明 $k=m+1$ 时(2-40-2) 成立。从而对所有自然数 k, (2-40-2) 成立。

特别地对 $k=1989$, 能整除 P_{1989} 的最高次幂为 3^{994}。

[例 2-41] (1992 年全国联赛试题) 设集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$, 若 X 是 S_n 的子集, 把 X 中的所有数的和称为 X 的"容量"(规定空信的容量为零)。若 X 的容量为奇(偶) 数, 则称 X 为 S_n 的奇(偶) 子集。

① 求证: S_n 的奇子集与偶子集的个数相等。

② 证明当 $n \geq 3$ 时, S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等。

③ 求 S_n 的所有奇子集的容量之和。

我们采用数学归纳法和递推方法并用的方法来证明①, ②。

解: ①设 S_n 的奇子集的个数为 a_n, 偶子集的个数为 b_n。

当 $n=1$ 时, $S_n=\{1\}$, 这时奇子集为 $\{1\}$, 偶子集为 , $a_1=b_1=1$, 结论成立。

假设 $n=k$ 时结论成立, 即 $a_k=b_k$。当 $n=k+1$ 时, 分两种情况讨论。

若 k 为奇数, 则 $k+1$ 为偶数, 这时 S_{k+1} 的奇子集可分为两类: 一类是 S_k 的奇子集; 另一类是 S_k 的奇子集 $\cup\{k+1\}$。因此

$$a_{k+1}=2a_k \tag{2-41-1}$$

类似有

$$b_{k+1}=2b_k \tag{2-41-2}$$

由归纳假设及(2-41-1), (2-41-2)便有 $a_{k+1}=b_{k+1}$。

若 k 为偶数, 则 $k+1$ 为奇数, 这时 S_{k+1} 的奇子集可分为两类: 一类是 S_k 的奇子集; 另一类是 S_k 的偶子集 $\cup\{k+1\}$。因此

$$a_{k+1}=a_k+b_k \tag{2-41-3}$$

类似有

$$b_{k+1}=b_k+a_k \tag{2-41-4}$$

由(2-41-3), (2-41-4)及归纳假设得 $a_{k+1}=b_{k+1}$。

故 $n=k+1$ 时结论也成立, ①得证。

② 设 S_n 的所有奇子集的容量之和为 A_n, S_n 的所有偶子

集的容量之和为 B_n。当 $n=3$ 时,易验证 $A_3=B_3$(略)。假设 $n=k$ 时有 $A_k=B_k$,那么 $n=k+1$ 时,也分两种情况。

若 k 是偶数,则 $k+1$ 是奇数,这是 S_{k+1}的奇子集可分为两类,一类是 S_k 的奇子集,所有容量之和为 A_k;另一类是 S_k 的偶子集 $\cup\{k+1\}$,其所有容量之和为 $B_k+(k+1)b_k$,因此

$$A_{k+1}=A_k+B_k+(k+1)b_k \qquad (2\text{-}41\text{-}5)$$

同样有

$$B_{k+1}=B_k+A_k+(k+1)a_k \qquad (2\text{-}41\text{-}6)$$

由①知 $a_k=b_k$,根据(2-41-5),(2-41-6)及归纳假设便有 $A_{k+1}=B_{k+1}$。

若 k 是奇数,同上讨论 S_{k+1}的奇子集的结构可得

$$A_{k+1}=A_k+A_k+(k+1)a_n$$

同样

$$B_{k+1}=B_k+B_k+(k+1)b_n$$

也有 $A_{k+1}=B_{k+1}$。

这说明 $n=k+1$ 时结论成立。

③ 注意到 S_n 的每一个元素含在 2^{n-1}个子集中,因此 S_n 的子集的所有容量之和为

$$2^{n-1}(1+2+\cdots+n)=2^{n-2}(n+1)n$$

再由②的结果便知 S_n 的所有奇子集的容量之和为 $2^{n-3}(n+1)n$。

3. 通项公式法

运用递推方法处理的问题中还包含下列类型问题,那就是根据数列的通项反向求数列的递归关系来处理的问题,这和前面一般通过建立递归关系式通项处理的问题形成逆向思维过程。

[**例** 2-42] (**第** 17 **届全俄竞赛试题**) **求证对于任意自然数** n, $1+[(3+\sqrt{5})^n]$ **被** 2^n **整除**(**这里**$[x]$**表示数** x **的整数部分**)。

解: **设** $x_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$, **则**

$x_{n+2}=((3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5}))((3+\sqrt{5})^{n+1}+(3-\sqrt{5})^{n+1})-(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^{n+1}+(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^{n+1}$

$=6x_{n+1}-(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})((3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n)$

$=6x_{n+1}-4x_n$

即

$$x_{n+2}=6x_{n+1}-4x_n \quad (n\geq 1) \qquad (2\text{-}42\text{-}1)$$

因为 $x_1=6$, $x_2=28$ **为整数**, **故所有的** x_n **均为整数**。

用数学归纳法证明 x_n **被** 2^n **整除**。**当** $n=1$, $n=2$ **时**, **直接验证**; **若** x_n **被** 2^n **整除**, x_{n+1}**被** 2^{n+1}**整除**, **设** $x_n=2^n p$, $x_{n+1}=2^{n+1}q$(p, q **为自然数**), **则由递推关系**(2-42-1) **得** $x_{n+2}=2^{n+2}\cdot(3p-q)$, **这说明** x_{n+2}**被** 2^{n+2}**整除**, **因此一切** x_n **被** 2^n **整除**。

因为 $0<(3-\sqrt{5})^n<1$, **而** x_n **为整数**, **从而有**

$$x_n=[(3+\sqrt{5})^n]+1$$

问题由此得证。

[**例** 2-43] (1980 **年芬兰等四国竞赛试题**) **试确定**$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$**的小数点前一位数字和后一位数字**。

解: **记**$N=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$,

$$x_n=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n}+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2n}$$

$$= (5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n,$$

则$\{x_n\}$的特征根为 $\lambda_1=5+2\sqrt{6}$, $\lambda_2=5-2\sqrt{6}$, 特征方程为

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\equiv x^2-10x+1=0$$

所以$\{x_n\}$的递归关系为

$$x_n=10x_{n-1}-x_{n-2}\quad (n\geq 3)\qquad (2\text{-}43\text{-}1)$$

又 $x_1=10$, $x_2=98$ 皆为整数, 运用(2-43-1)易见 x_n 为整数。

由(2-43-1)得 $x_n=10x_{n-1}-(10x_{n-3}-x_{n-4})=10(x_{n-1}-x_{n-3})+x_{n-4}$ 所以 $x_n\equiv x_{n-4}\pmod{10}$, 于是 $x_{999}\equiv x_2\pmod{10}$, 即知 x_{999}的个位数字是 8。

又因为 $0<5-2\sqrt{6}<0.2$, 于是

$$0<(5-2\sqrt{6})^{990}<0.2^{990}=0.008^{330}<0.01^{330}=0.\underbrace{00\cdots0}_{660\text{个}0}1$$

即有 $x_{990}=N+(5-2\sqrt{6})^{990}=N+0.\underbrace{00\cdots0}_{\text{至少}660\text{个}0}**$

因 x_{999}的个位数字是 8, 所以 N 的小数点前一位数字是 7, 后一位数字是 9(实际上小数点后至少有 660 个 9)。

4. 建立递归组法

有些涉及两个或多个整数变元的问题, 需通过挖掘题中隐含的条件, 分析变元间的数值变化关系建立递归组, 才能达到解题之目的。

* [例 2-44] (第 22 届 IMO 试题) 设整数 $m, n\in\{1, 2, 3, \cdots, 1981\}$, 且满足

$$(n^2-mn-m^2)^2=1\qquad (2\text{-}44\text{-}1)$$

试确定 m^2+n^2 的最大值。

解:(1,1)显然满足(2-44-1)。设(m,n)为(2-44-1)的一组解,即(m,n)为$n^2-mn-m^2=\pm1$的一组解,其中$m,n\in\{1,2,3,\cdots,1981\}$。而$n^2=mn+m^2\pm1\geq m^2$,故$n\geq m$,仅当$m=n=1$时等号成立。

注意到 m,n 较隐蔽的下列数值关系:

$$\begin{aligned}(n^2-mn-m^2)^2&=[(n-m)^2+m(n-m)-m^2]^2\\&=[m^2-m(n-m)-(n-m)^2]^2\end{aligned}$$

因此,如果(m,n)是方程(2-44-1)的一组解,那么$(n-m,m)$也是(2-44-1)的一组解。依次递推$(m-(n-m),n-m)$也是方程(2-44-1)的一组解。把(m,n),$(n-m,m)$,$(m-(n-m),n-m)$分别记作$(F(m),G(n))$,$(F(m-1),G(n-1))$,$(F(m-2),G(n-2))$,不难发现递推关系

$$F(m)=F(m-1)+F(m-2)$$
$$G(n)=G(n-1)+G(n-2)$$

又(1,1)满足方程,因此满足方程的 m,n 组成裴波那契数列

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots$, 987, 1597

相邻两数为方程一组解。

因此 m^2+n^2 的最大值为 $987^2+1597^2=3524578$。

[例 2-45] (第 21 届 IMO 试题)A 和 E 是正八边形的一组相对顶点,一个青蛙从 A 点开始跳跃,从正八边形除 E 外的每一顶点都可以向相邻两顶点的任何一个跳动。当青蛙跳至 E 后就停在那儿,不再跳动。今用 a_n 表示从 A 点出发经 n 步跳至 E 点的所有不同的跳法种数,试证明

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n\text{ 为奇数}) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left((2+\sqrt{2})^{m-1} - (2-\sqrt{2})^{m-1}\right) & (n = 2m, m \in W) \end{cases}$$

注: 一个跳 n 步的跳法是一个由顶点组成的有限序列($P_0, P_1, \cdots, P_n$), 它满足: (i) $P_0 = A$; $P_n = E$; (ii) 对 $0 \le i \le n-1$, $P_i \ne E$; (iii) $0 \le i \le n-1$, P_i 与 P_{i+1} 是相邻的。

证明: 设八边形的顶点按逆时针排列分别为 A, B, C, D, E, F, G, H。用 a_n, b_n, c_n, d_n 分别表示从 A, B, C, D 各点出发经 n 步跳至 E 点的所有跳法种数。由对称性知从 H, G, F 出发经 n 步跳至 E 点的所有跳法种数也分别为 b_n, c_n, d_n, 于是当 $n > 1$ 时, 有

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-1} = 2b_{n-1} \qquad (2\text{-}45\text{-}1)$$

(2-45-1) 表示从 A 出发经 n 步到 E 点的跳法种数, 可分两类, 一类是从 A 出发跳到 B 后再经 $n-1$ 步到 E 的跳法种数, 另一类是从 A 出发先到 H 后经 $n-1$ 步跳到 E 的跳法种数。

类似地有

$$b_n = c_{n-1} + a_{n-1} \qquad (2\text{-}45\text{-}2)$$

$$c_n = d_{n-1} + b_{n-1} \qquad (2\text{-}45\text{-}3)$$

$$d_n = c_{n-1} \qquad (2\text{-}45\text{-}4)$$

且 $a_1 = b_1 = c_1 = 0, d_1 = 1$

这样我们建立了递归组(含(2-45-1), (2-45-2), (2-45-3)和(2-45-4))。下面通过递归组求 a_n 的递归关系。

由(2-45-1)得

$$b_n = \frac{1}{2}a_n \qquad (2\text{-}45\text{-}5)$$

由(2-45-1)(2-45-2)得

$$c_n = \frac{1}{2}a_{n+2} - a_n \tag{2-45-6}$$

由(2-45-4),(2-45-5)得

$$d_n = \frac{1}{2}a_{n+1} - a_{n-1} \tag{2-45-7}$$

由(2-45-5),(2-45-6)和(2-45-7)代入(2-45-3)得出 a_n 的递归关系

$$a_{n+2} = 4a_n - 2a_{n-2} \tag{2-45-8}$$

这里 $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 2$。

由(2-45-8)及数学归纳法易证原结论成立。

习 题 2.4

1. 假定一对兔子每隔一个月生一对一雌一雄的小兔。每对小兔在两个月后也逐月生一对一雌一雄的小兔,现设年初时在兔房子里放一对大兔,问一年后,兔房子里有多少对兔子?

2. 平面上有 n 个椭圆,任何两个都相交于 4 个不同的点,求这 n 个椭圆划分平面为多少块?

3. 4 个人互相传球,要求接球后马上传给别人。由甲传球,并作为第一次传球,求经过 10 次传球后球仍回到发球人甲手中的传球方式的种数。

4. 求证: 2^n 整除 $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$(第 26 届 IMO 预选题)。

5. 运动会开了 n 天($n>1$),发出 m 个奖牌,第一天发出一个加上余下的$(m-1)$个的$\frac{1}{7}$,第二天发出 2 个加上余下的$\frac{1}{7}$,如此继续,最后 n 天恰好把余下的奖牌发完,问运动会开了几天,共发多少个奖牌?(第 9 届 IMO 预选题)。

6. 现有 1990 堆石头,各堆中石头的块数依次为 1, 2, …, 1990。进

行如下操作:每次操作可以选定任意多堆并从每堆都拿走同样数目的石块。问要把所有石块都拿走,最少要操作多少次(第24届前苏联奥林匹克试题)?

2.5　有序化方法

无论在高等数学或中学数学的解题中,当题内出现多个元素时,往往是把它们按照一定的规则重新排列,从而使题目由一般情况化归特殊情况,以便使问题变得容易求解,这就是有序化方法。有序化方法是解题中常用的一种基本方法。它还常常和其它方法综合使用。下面举例阐明它在解题中的应用。

1. 在求解不定方程中的应用

[例2-46]　(1989年苏州竞赛试题)求不定方程 $x^x+y^y+z^z+u^u=w^w$ 的所有正整数解。

分析:原方程左端的 x,y,z,u 互换位置是不变的(即对称),所以可用有序化方法,先估值,再求解。

解:设(x,y,z,u,w)是方程的一个正整数解,于是用有序化方法,可令 $0<x\leq y\leq z\leq u$,于是 $w\geq u+1$,且

$$4u^u\geq w^w\geq(u+1)^{u+1}$$

即　$4\geq\frac{(u+1)^{u+1}}{u^u}>u+1$,可见 $u<3$,

于是 $u=1$ 或 $u=2$。

当 $u=1$ 时,必有 $x=y=z=1$,这时 $w=2$

当 $u=2$ 时,$x^x+y^y+z^z+2^2\leq4\times2^2<3^3\leq w^w$,无解。

故原方程有且仅有一解(1, 1, 1, 1, 2)。

[例 2-47]　(1983 年巴西数学竞赛试题)证明方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1983}$$

只有有限多个自然数解。

解: 注意, 原方程有解, 例如 $x=y=z=3\times 1983$ 即是一解。现在证明, 仅有有限多组数 $x, y, z\in N$ 满足原方程。

因方程变元 x, y, z 的地位对称, 因此用有序化方法, 设 $x\leq y\leq z$, 且 (x, y, z) 是原方程的自然数解, 则

$$0<\frac{1}{z}\leq\frac{1}{y}\leq\frac{1}{x}$$

于是有 $\frac{1}{x}<\frac{1}{1983}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{x}$

由此得到 $1983<x\leq 3\times 1983$, 因此 x 可取的值至多有 2×1983 个。对 x 的每个值, 有

$$\frac{1}{1983}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{2}{y}$$

所以　$y\leq 2\times\frac{1983x}{x-1983}\leq 2^2\times 1983^2$

因此 y 可取的值至多有 $2^2\times 1983^2$ 个。最后, 如果 x 与 y 的值都已给定, 则 z 由方程唯一确定。于是适合 $x\leq y\leq z$ 的解至多有 $2^3\times 1983^3$ 个。故原方程只有有限多个自然数解。

2. 用于处理绝对值问题

对于多个变元的绝对值问题, 运用有序化方法, 可去掉绝对值符号, 有利于问题的解决。

[例 2-48]　(第 8 届 IMO 试题)解方程组

$$|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1$$
$$|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1$$
$$|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1$$
$$|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1.$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4 是互不相等的实数。

分析: 注意到方程组中交换各数的下标时, 原方程组不变, 不妨先把 a_1, a_2, a_3, a_4 有序化, 令 $a_1>a_2>a_3>a_4$, 于是可除去方程组中系数的绝对值符号, 即

$$(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1 \qquad (2\text{-}48\text{-}1)$$

$$(a_1-a_2)x_2+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1 \qquad (2\text{-}48\text{-}2)$$

$$(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1 \qquad (2\text{-}48\text{-}3)$$

$$(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_4=1 \qquad (2\text{-}48\text{-}4)$$

再 (2-48-1) 减 (2-48-2), (2-48-2) 减 (2-48-3), (2-48-3) 减 (2-48-4), 并利用 $a_1>a_2>a_3>a_4$ 的性质可得

$$x_2+x_3+x_4=x_1$$
$$-x_2+x_3+x_4=x_1$$
$$-x_2-x_3+x_4=x_1$$

解之得 $x_1=x_4, x_2=x_3=0$, 代入(2-48-1)得

$$x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4},\ x_2=x_3=0$$

[例 2-49] (第六届加拿大竞赛试题) 设 n 是固定的正整数, 对于满足 $0\leq x_i\leq 1$, $i=1, 2, \cdots, n$ 的任何 n 个实数, 求

和式

$$S=\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|$$

的最大可能值。

解:注意到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在问题中具有等同地位,不妨将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有序化。

设 $0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le 1$,这时

$$S=\sum_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

这个和式有 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ 项,对于每个 $k, 1\le k\le n$, x_k 出现在这些项中的 $n-1$ 项中:$k-1$ 次在左边位置(即在 $x_k-x_1, x_k-x_2, \cdots, x_k-x_{k-1}$ 各项中),且 $n-k$ 次在右边位置(即在 $x_{k+1}-x_k, x_{k+2}-x_k, \cdots, x_n-x_k$ 各项中)。因此

$$S=\sum_{k=1}^{n}x_k(k-1-(n-k))=\sum_{k=1}^{n}x_k(2k-n-1)$$

当 $k<\frac{n+1}{2}$ 时,x_k 的系数 $2k-n-1$ 是负数,弃掉这些项(只须令 $x_k=0$ 便可),便有

$$S\le\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}x_k(2k-n-1)$$

其中[x]表示不超过 x 的最大整数

因此.,当 n 是偶数时

$$S\le\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}x_k(2k-n-1)\le\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}(2k-n-1)$$

$$=1+3+5+\cdots+(n-1)=\frac{n^2}{4}$$

当 n 为奇数时

$$S \leq \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} x_k(2k-n-1) \leq \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(2k-n-1)$$

$$= 2+4+6+\cdots+(n-1)=\frac{n^2-1}{4}$$

所以 $$S \leq \begin{cases} \dfrac{n^2}{4} & \text{如果 } n \text{ 是偶数} \\ \dfrac{n^2-1}{4} & \text{如果 } n \text{ 是奇数} \end{cases} \qquad (2\text{-}49\text{-}1)$$

当 n 是偶数时,只要取 $x_1=x_2=\cdots=x_{\frac{n}{2}}=0$, $x_{\frac{n}{2}+1}=\cdots=x_n=1$, (2-49-1)取等号;当 n 是奇数时,只要取 $x_1=x_2=\cdots=x_{\frac{n-1}{2}}=0$, $x_{\frac{n+1}{2}}=\cdots=x_n=1$, (2-49-1)取等号。

故 S 的最大值为

$$S_{max}=\begin{cases} \dfrac{n^2}{4} & \text{如果 } n \text{ 是偶数} \\ \dfrac{n^2-1}{4} & \text{如果 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

也可简单记为 $S_{max}=\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$。

3. 在不等式问题中的应用

有序化方法在不等式问题中的应用有两种表现形式。其一,通过元素的有序化,简化问题的讨论;其二,通过元素的有序化,再利用排序原理来解题。

先看第一种应用形式的例。

[例 2-50] (1990 年冬令营选拔试题)设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 2)$ 是 n 个互不相同的实数, $S=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$, $M=\min\limits_{1 \leq i<j \leq n}(a_i-a_j)^2$,求证:

$$\frac{S}{M} \geq \frac{n(n^2-1)}{12}$$

证明:考虑到变元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的地位等同,采用有序化方法来解此题。

不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,注意到 $a_k - a_{k-1} \geq \overline{M}$,于是当 $j > i$ 时

$$a_j - a_i = (a_j - a_{j-1}) + (a_{j-1} - a_{j-2}) + \cdots + (a_{i+1} - a_i)$$
$$\geq (j-i)\overline{M}$$

所以

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)^2 \geq M \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)^2$$
$$= M \sum_{k=1}^{n-1} (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2)$$
$$= M \sum_{k=1}^{n-1} [C_1^1 + (2C_2^2 + C_2^1) + \cdots + (2C_k^2 + C_k^1)]$$
$$= M \sum_{k=1}^{n-1} (C_{k+1}^2 + 2C_{k+1}^3) = M(C_{n+1}^2 + 2C_{n+1}^4) = \frac{M}{12} n^2 (n^2 - 1)$$

(2-50-1)

另一方面

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)^2 = (n-1)S - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$
$$= nS - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq nS \quad (2\text{-}50\text{-}2)$$

由(2-50-1)和(2-50-2)式即得结论。

注:例 2-50 通过有序化,极易看出 $a_j - a_i$ 与 M 的关系,从而将问题转化为一个普通的求和问题,得以解决。

[例 2-51] 设 a, b, c 是正实数, $\alpha \in R$,求证:

$$abc(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha) \geq a^{\alpha+2}(-a+b+c) + b^{\alpha+2}(a-b+c)$$

$$+c^{\alpha+2}(a+b-c)$$

等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立。

证明:不妨设 $a\geq b\geq c>0$,记不等式左边与右边的差为 P,则

$$P=a^{\alpha+1}(bc+a^2-ab-ca)+b^{\alpha+1}(ca+b^2-bc-ab)+c^{\alpha+1}(ab+c^2-ca-bc)$$

$$=a^{\alpha+1}(a-b)(a-c)-b^{\alpha+1}(a-b)(b-c)+c^{\alpha+1}(a-c)(b-c)$$

$$=a^{\alpha+1}(a-b)[(a-b)+(b-c)]-b^{\alpha+1}(a-b)(b-c)+c^{\alpha+1}[(a-b)+(b-c)]$$

$$=a^{\alpha+1}(a-b)^2+(a-b)(b-c)(a^{\alpha+1}-b^{\alpha+1}+c^{\alpha+1})+c^{\alpha+1}(b-c)^2$$

$$\geq(a-b)(b-c)(a^{\alpha+1}+c^{\alpha+1}-b^{\alpha+1})$$

如 $1+\alpha\geq 0$,则 $a^{\alpha+1}-b^{\alpha+1}\geq 0$;

如 $1+\alpha<0$,则 $c^{\alpha+1}-b^{\alpha+1}\geq 0$。

故总有 $P\geq 0$,故原不等式成立。

注:取 $\alpha=0$,a,b,c 为三角形的三边,例 2-51 便是第 6 届 IMO 试题。

再看第二种应用形式即利用排序原理来解题的例子。

为完整起见,先叙述排序原理:

设 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$,$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$,则

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geq a_1b_{i1}+a_2b_{i2}+\cdots+a_nb_{in}$$
$$\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

等号都成立的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$,其中 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$ 是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的任一排列。

[例 2-52] (第 32 届 IMO 预选题)设 $\frac{1}{2}\leq P\leq 1$, $a_i\geq 0$,

$0\le b_i\le P$, $i=1,2,\cdots,n$, $n\ge 2$, 如果

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} b_i=1,\ A_i=\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} a_j$$

求证:

$$\sum_{i=1}^{n} b_iA_i\le\frac{P}{(n-1)^{n-1}}.$$

分析: 由排序原理知, 当$\{b_i\}$, $\{A_i\}$为同序列时, 左边$\sum_{i=1}^{n} b_iA_i$最大。因此如能证明此时不等式成立, 其它情形当然成立。

证明: 由排序原理不妨设$b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_n$, $A_1\ge A_2\ge\cdots\ge A_n$。由于

$$0\le b_i\le P,\ 且\ \sum_{i=1}^{n} b_i=1,\ \frac{1}{2}\le P\le 1,\ 这时$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_2A_i&=b_1A_1+(b_2A_2+b_3A_3+\cdots+b_nA_n)\\&\le PA_1+(b_2+b_3+\cdots+b_n)A_2\\&\le PA_1+(1-P)A_2\le P(A_1+A_2).\end{aligned}\qquad(2\text{-}52\text{-}1)$$

由均值不等式及$\sum_{i=1}^{n} a_i=1$可得

$$A_1+A_2=a_3a_4\cdots a_n(a_2+a_1)\le\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n-1}=\frac{1}{(n-1)^{n-1}}\qquad(2\text{-}52\text{-}2)$$

由(2-52-1), (2-52-2)便得所证不等式。

[例 2-53] (1978 年中国数学竞赛试题) 10 个人各拿一只水桶打水。设水笼头流满第 i 人的水桶需要时间 t_i。又设这

些 t_i 各不相同,问当只有一个水笼头放水时,如何安排 10 人的打水次序,使 10 人所花费的总等待时间最少?

解:不妨设 $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{10}$,假定打水的次序为 $i_1, i_2, \cdots, i_{10}$。则在第 i_1 人打水时,有 10 个人在等待 。在第 i_2 个人打水时有 9 个人在等待,…,其总等待时间为

$$10t_{i_1} + 9t_{i_2} + \cdots + t_{i_{10}}$$

因为 $10 > 9 > 8 > \cdots > 2 > 1$,故由排序原理可知最小值为 $10t_1 + 9t_2 + \cdots + t_{10}$。

即由所花时间最少的人开始,依次打水,直到所花时间最多的人打完为止。

4. 用于解决几何问题

[例 2-54] 在平面上给出 $2n+1$ 个点,试问能否作一个圆,使得 n 个点在圆内,n 个点在圆外,1 个点在圆上。

分析:如果在平面上能找到一点 O,使 O 到已知的 $2n+1$ 个点的距离都不相等,那么利用有序化思想,按线段 OA_i($i=1, 2, \cdots, 2n+1$)长,由小到大地排列,比如 $OA_1 < OA_2 < \cdots < OA_{2n+1}$,这时,以 O 为圆心,OA_{n+1} 的长为半径作一圆即为所求的满足题设条件的圆。

解:把 $2n+1$ 个点,每两点连一线段,可得 $C_{2n+1}^2 = 2n^2 + n$ 条。这些线段的中垂线也有 $2n^2 + n$ 条。显然这有限条直线不能布满整个平面。于是可以取一点 O,使它不在上述任何一条垂线上。

设给出的点为 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$,则 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_{2n+1}$ 彼此不相等。不妨设 $OA_1 < OA_2 < \cdots < OA_{2n+1}$,故以 O 为圆心,OA_{n+1} 为半径画圆,则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个点在⊙O 内,

其余 n 个点 $A_{n+2}, A_{n+3}, \cdots, A_{2n+1}$ 在⊙O 外, 且点 A_{n+1} 在⊙O 上, 得证。

[例 2-55] (第 3 届 IMO 试题) 设 P 为△ABC 内任一点, 连接 AP, BP, CP, 并延长分别交对边于 D, E, F, 那么比值 $\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF}$ 必有一个不大于 2, 也必有一个不小于 2。

(此题证法甚多, 但用有序化方法解此题较简捷。)

证明: 在图 2.3 中我们对△PBC, △PAB, △PCA 的面积大小进行排序, 不妨设

$$S_{\triangle PBC} \geq S_{\triangle PAB} \geq S_{\triangle PCA}$$

图 2.3

因为 $S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCA} = S_{\triangle ABC}$, 所以有

$$S_{\triangle PBC} \geq \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}, S_{\triangle PCA} \leq \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

于是 $\frac{PD}{AD} = \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}} \geq \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{PD}{AP} \geq \frac{1}{2}$, 即 $\frac{AP}{PD} \leq 2$。

同理由 $\frac{PE}{BE} = \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}} \leq \frac{1}{3}$ 得 $\frac{BP}{PE} \geq 2$, 这就证明了结论。

在处理几何问题时, 还要注重挖掘量之间的一些潜在的有序关系, 利用这些有序关系来帮助我们解题。

[例 2-56] 设三角形△ABC 的三边为 a, b, c, 现以顶点

A, B, C 分别为圆心，作三个相互外切的圆。这三个圆在 $\triangle ABC$ 内部的三条弧围成一个曲边三角形 $A'B'C'$（如图 2.4）。设曲边三角形 $A'B'C'$ 的三条弧的长度为 a', b', c'，求证：

$$a' + b' + c' \leq \frac{\pi}{6}(a + b + c).$$

这个有趣的不等式是北京师大马柏林博士提出来的。

分析：易见，以 A, B, C 分别为圆心，两两相切的三个圆存在，事实上，设它们的半径分别为 r_1, r_2, r_3，则由 $r_1 + r_2 = c$, $r_1 + r_3 = b$, $r_2 + r_3 = a$ 马上解得 $r_1 = \frac{b + c - a}{2}$, $r_2 = \frac{a + c - b}{2}$, $r_3 = \frac{a + b - c}{2}$。这样，我们可用弧长公式将 a', b', c' 用 a, b, c 和 A, B, C 表示出来。再利用潜在的边角有序关系 $(a - b)(A - B) \geq 0$（大边对大角）便能迅速证得此题的不等式。

图 2.4

证明：因 $r_1 = \frac{b + c - a}{2}$, $r_2 = \frac{a + c - b}{2}$, $r_3 = \frac{a + b - c}{2}$，则由弧长公式 $a' = Ar_1$, $b' = Br_2$, $c' = Cr_3$ 便将题中要证的不等式转化为

$$A(b + c - a) + B(a + c - b) + C(a + b - c) \leq \frac{\pi}{3}(a + b + c) \tag{2-56-1}$$

下证(2-56-1)，用 $\pi = A + B + C$ 代入(2-56-1)整理得

$$A(2a - b - c) + B(2b - a - c) + C(2c - a - b) \geq 0$$

即 $\quad A[(a - b) + (a - c)] + B[(b - a) + (b - c)]$

$$+C[(c-a)+(c-b)]\geq 0$$

即是

$$(a-b)(A-B)+(b-c)(B-C)+(c-a)(C-A)\geq 0 \qquad (2\text{-}56\text{-}2)$$

这说明(2-56-1)等价于(2-56-2)。而利用三角形大边对大角的这一有序关系即知(2-56-2)式左边的每一项非负,因此(2-56-2)成立,从而(2-56-1)成立,原不等式得证。

5. 用于处理各种组合问题

[例 2-57] 有一排树共有 n 棵,现从中砍伐 $k(n\geq 3k-2)$ 棵,为了使砍伐的树木不过于集中,园林部门规定:在每砍下一棵后至少要留下两棵方能继续砍下一棵,问这 k 棵树的砍伐方法有多少种?

这是一个应用型的组合计数问题,排序并构造相应的数学模型是常用的手法。

解:记这 n 棵树的编号为 $1, 2, 3, \cdots, n$,砍下的 k 棵树记为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$,并设 $1\leq a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k\leq n$。依题意应有 $a_i<a_{i+1}-2(i=1, 2, \cdots, k-1)$ 所以 $1\leq a_1<a_2-2<a_3-4<\cdots<a_k-2(k-1)\leq n-2(k-1)$。因此 $a_1, a_2-2, \cdots, a_k-2(k-1)$,为从 1 至 $n-2(k-1)$ 这 $n-2(k-1)$ 个数中选取 k 个数从小到大的一个排列。这种排列的个数为 $C_{n-2(k-1)}^{k}$;并且每个排列完全确定 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的唯一种取法。故 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的取法有 C_{n-2k+2}^{k} 种,即这 k 棵树的砍伐方法有 C_{n-2k+2}^{k} 种。

[例 2-58] (第 16 届前苏联竞赛试题)在一张向四面无限伸展的方格纸上,每一方格内任意填上一个实数,证明:纸上必有一个方格内的数不大于这一方格周围八个方格中至少

四个方格内新填的数。

分析: 本例的条件很一般, 在纸的每一方格内可以有无限种不同的填法, 从表面上看来一时无法入手, 但从题意来看, 相邻各数需比较大小, 所以就容易想到有序化方法, 但是无限个小方格的数排次序不大好办, 为此, 不得已而求其次, 先从 4×4 方格纸上任意填 16 个实数 $a_1, \cdots, a_{16}$。现先有序化, 令 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{16}$。先看 a_1, 如果 a_1 符合题中结论, 那么命题得证。如果 a_1 不合题中结论, 那么 a_1 必在 4×4 方格纸的一只角的方格内, 再依次地考察 a_2, a_3, a_4, 如果 a_2, a_3, a_4 都不合题意, 那么它们必定在 4×4 方格纸的四只角上的方格内。这时, 看 a_5, 无论它填在剩下的 12 只方格内的哪一只, a_5 周围相邻的方格中至少有 4 格填了 $a_6, \cdots, a_{16}$中的某 4 个, 可见 a_5 必合题意。

说明: 本例涉及到无限多个实数, 但在解题中, 仅对 16 个实数有序化, 这种有序化称为局部有序化。

习　题　2.5

1. 求不定方程 $x! + y! + z! = w!$ 的所有正整数解。(加拿大第 15 届竞赛试题)

2. 现有 $2n\times 2n$ 的正方形方格棋盘, 在其中任意 $3n$ 个方格中, 各放一枚棋子, 求证: 可以选出 n 行和 n 列, 使得 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中。

3. $\triangle ABC$ 的内切圆切三边 AB, BC, CA 于 D, E, F, 且 AB, BC, CA 被切点分成的两线段之比都属于开区间 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$。求证: $\triangle ABC$ 为锐角三角形。

4. 已知$\triangle ABC$ 是任一三角形, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 求

证:

(1) $Aa+Bb+Cc\geq\frac{1}{2}(Ab+Ac+Ba+Bc+Ca+Cb)$;

(2) $A^m a^n+B^m b^n+C^m c^n\geq A^m b^n+B^m c^n+C^m a^n$。

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in N$ 且互不相同, 求证

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leq a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$. (第 20 届 IMO 试题)

2.6 复数方法

根据复数及其运算的几何意义, 平面上某些图形的几何关系可以通过复数代数关系式来刻画, 从而一些几何问题就可以通过一系列的复数运算, 巧妙地导出所需的结果。由于利用复数解几何问题主要是直截了当的运算, 故无需在添置辅助线等技巧要求高的环节多花功夫, 而使解题思路显得自然流畅。

下面通过实例介绍复数方法在几何中的应用(在行文中假定读者已熟悉了复数的一些基础知识)。

[例 2-59] 如图 2.5, 设线段 AB 的中点为 M, 从 AB 上另一点 C 向直线 AB 的一侧引线段 CD, 令 CD 中点为 N, BD 中点为 P, MN 的中点为 Q, 求证; 直线 PQ 平分线段 AC。

证明: 不妨设复平面的点 A, B, C, D 分别与复数 $-1, 1, a, z$ 对应, 其中 $a\in(-1, 1)$, 于是点 M, N, P, Q 对应的复数分别是 $0, \frac{1}{2}(a+z), \frac{1}{2}(1+z), \frac{1}{4}(a+z)$。

设 PQ 的延长线与 AB 相交于 E, E 对应复数为 β 由于 E, Q, P 三点共线, 因此存在正实数 λ使得$\overline{E}P=\lambda\overline{E}Q$, 即

$$\frac{1}{2}(1+z)-\beta=\lambda\frac{1}{4}(a+z)-\beta$$

$$(2-\lambda)z=4\beta-2-\lambda a-4\lambda\beta$$

上式右边为实数, 故有 $\lambda=2$ 及 $4\beta-2-\lambda a-4\lambda\beta=0$ 解得 $\beta=\frac{1}{2}(\alpha\ \ 1)$。这表明 E 是 AC 的中点, 从而有 PQ 平分线段 AC。

图 2.5

[例 2-60] (欧拉定理) 设△ABC 的外心为 O, 重心为 G, 垂心为 H, 求证 O, G, H 共线, 且 OG∶GH = 1∶2。

此定理的证法很多, 但纯平面几何证明需较高的添辅助线的技巧, 解析法又往往计算较繁。下面的复数方法却十分简单。

证明: 以 O 为原点建立复平面(如图 2.6), 设 A, B, C, G, H 对应的复数分别为 Z_A, Z_B, Z_C, Z_G, Z_H, 则易见

$$|Z_A|=|Z_B|=|Z_C| \quad 且 \quad Z_G=\frac{1}{3}(Z_A+Z_B+Z_C)$$

故下面只须证 $Z_H=Z_A+Z_B+Z_C$ 便可。为此令 $x=Z_A+Z_B+Z_C$, $d=Z_A+Z_C$, 则 $x=Z_B+d$。再设 x, d 对应的点为 X, D, 则 BX ∥ OD, OA ∥ CD, 而 $|OA|=|OC|$, 所以四边形 AOCD 为菱形。故 OD ⊥ AC, 于是有 BX ⊥ AC, 同理可证 AX ⊥ BC, CX ⊥ AB。

图 2.6

由上所述可知, X **为**△ABC **三条高的交点**, **即** X **与** H **重合**, **所以** $Z_H = Z_A + Z_B + Z_C$, **得证。**

利用复数处理轨迹问题是十分方便的。

[**例** 2-61]　(**第** 21 **届** IMO **试题**) **平面上两圆相交**, A **为一个交点**, **两点同时自** A **出发**, **以常速度分别在各自的圆周上依相同方向绕行**, **旋转一周后两点同时回到原出发点**, **求证**: **在这平面上有一定点** P, **使得在任何时刻从** P **到两动点的距离相等。**

分析: **见图** 2. 7。**不妨设两圆在复平面上**, **方程为** $|z| = 1$, **及** $|z - a| = \rho$, **其中** $a > 0$, **点** A **有两种表示法** $A = e^{i\theta}$ **及** $A = a + \rho e^{i\varphi}$。

图　2. 7

为了证明本题, **必须且只须求出一个复数** p, **使得对一切实数** t **有**

$$|p - e^{i\theta}e^{it}| = |p - (a + \rho e^{i\varphi})e^{it}|$$

在上式左边用 $e^{i\theta} = a + \rho e^{i\varphi}$ **代入**, **得到**

$$|p - ae^{it} - \rho e^{i\varphi}e^{it}| = |p - \rho e^{i\varphi}e^{it} - a|$$

将上式左边绝对值内的复数取共轭之后再提取因子 e^{-it}, **得**

$$|p e^{it} - a - \rho e^{-i\varphi}| = |p - \rho e^{i\varphi}e^{it} - a|$$

若能使 $Pe^{it}-\rho e^{-i\varphi}=P-\rho e^{i\varphi}e^{it}$，则上式自然成立。而后者正是

$P+\rho e^{-i\varphi}=e^{it}(P+\rho e^{i\varphi})$

由此可见，若取 $P=-\rho e^{-i\varphi}$，则上式双方均为零，不论其中的 t 为怎样的实数。故 $-\rho e^{-i\varphi}$ 即为所求的点。

由复数的表示法可知，$-\rho e^{-i\varphi}$ 正是点 A 关于两圆连心线的中垂线的对称点。

证略。

[例 2-62]　(第 27 届 IMO 试题) 以点 O 为中心的正 n 边形($n\geq 5$)的两个相邻顶点记为 A，B，三角形 xyz 与 OAB 全等。最初令三角形 xyz 重叠于 OAB，然后在平面上移动 xyz，使点 y 和 z 都沿着多边形周界移动一周，而点 x 保持在多边形内移动，求点 x 的轨迹。

分析：见图 2.8。将点 O 放在复平面的原点上，设点 C 是正 n 边形与 B 相邻的另一顶点，从 A 到 B 再到 C 的方向是反时针方向。设在移动三角形 xyz 的过程中的某一时刻，y 在线段 AB 上，z 在线段 BC 上，按定比分点公式，有

$$y=(1-\lambda)A+\lambda B,\ 0\leq\lambda\leq 1$$
$$z=(1-\lambda)B+\mu C,\ 0\leq\mu\leq 1$$

令 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi}{n}}$，则 $B=\varepsilon A$，$C=\varepsilon B=\varepsilon^2A$，且 $(y-x)\varepsilon=z-x$

由此解出　$x=\dfrac{z-y\varepsilon}{1-\varepsilon}=\dfrac{1}{1-\varepsilon}(\mu-\lambda)(C-B)=\dfrac{1}{1-\varepsilon}(\mu-\lambda)(\varepsilon B-B)$

即　$x=-(\mu-\lambda)B$。

由于 $\mu-\lambda$ 为实数，上式表明，点 x 总在 O 与 B 决定的直线上。其次由 $|A|=|y-x|=|(1-\lambda)A+\mu B|=|1-\lambda+\mu\varepsilon|\cdot|A|$，得 $|1-\lambda+\mu\varepsilon|=1$，所以 $1\leq|1-\lambda|+|\mu\varepsilon|=1-\lambda+\mu$

从而 $\mu\geq\lambda$,可见点 x 将在从 B 到 O 的联线的延长线上移动。

下面考虑 x 离 O 的最远距离。

由对称性与连续性知, x 离 O 的最远距离应在 $y_B = z_B$ 时实现。因此, $\lambda+\mu=1$ 或 $1-\lambda=\mu$。以 a 记正 n 边形的边长, 由

图 2.8

$$\frac{R}{B} = \frac{\frac{1}{2}a}{\mu a} = \cos\frac{\pi}{n} \quad 得 \quad \mu = 1/2\cos\frac{\pi}{n}$$

从而 x 到 O 的最远距离为

$$(\mu-\lambda)|B| = (2\mu-1)|B| = \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$= a\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\Big/\sin\frac{2\pi}{n}。$$

可见, 所求轨迹是从 O 出发, 背向多边形的每一个顶点画出的 n 条线段, 其长度都相等, 由上式给出。

不少与旋转有关的几何问题, 使用复数处理效果特佳。

[例 2-63] (第 27 届 IMO 试题)在平面上给定点 P_0 和 $\triangle A_1A_2A_3$, 且约定当 $s\geq4$ 时, $A_s = A_{s-4}$。构造点列 $P_0, P_1, P_2, \cdots$, 使得 P_{k+1} 为点 P_k 绕中心 A_{k+1} 顺时针旋转 $120°$ 所到达的位置, $k=0, 1, 2, \cdots$。求证如果 $P_{1986} = P_0$, 则 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形。

证明: 记 $u = e^{i\pi/3}$, 按点列 $\{P_n\}$ 的构造知

$$(A_{k+1}-P_k)u = P_{k+1}-A_{k+1}$$

即 $P_{k+1}=(1+u)A_{k+1}-uP_k$, $k=0,1,\cdots,1985$。

将 $k=0,1,2$ **所得的三式结合起来，得到**

$$P_3=w+P_0$$

其中 $w=(1+u)(A_3-uA_2+u^2A_1)$ **是一个与** P_0 **无关的常数。同理，将** $k=3(m-1),3m-2,3m-1$ **所得的三式结合起来，即有**

$$P_{3m}=w+P_{3(m-1)},m=2,3,\cdots,662。$$

由此立即可得 $P_{1986}=662w+P_0$，**但已知** $P_{1986}=P_0$，**故得** $w=0$，**从而有**

$$A_3-uA_2+u^2A_1=0$$

因为 $u^2=u-1$，**故由上式得到**

$$A_3-A_1=u(A_2-A_1)$$

这意味着$\triangle A_1A_2A_3$ **为正三角形。**

[**例** 2-64] (1987 **年全国高中联赛试题**) **如图** 2.9，$\triangle ABC$ **和**$\triangle ADE$ **是两个不全等的等腰直角三角形。现固定**$\triangle ABC$，**而将**$\triangle ADE$ **绕** A **点在平面上旋转。试证：不论**$\triangle ADE$ **旋转到什么位置，线段** EC **上必存在一点** M，**使得**$\triangle BMD$ **为等腰直角三角形。**

证明 1：**不妨把复平面的原点放在** A **上，**C **放在正实轴上，因此** $A=0$，**又不妨设** $C=\sqrt{2}$，$B=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，$E=\lambda$，**这里** $0<\lambda<\sqrt{2}$，**于是**

$$D=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

在旋转任一角度 θ **之后，**E **变为** $\lambda e^{i\theta}$，**而** D **变为** $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)i}$，

仍记为 D。取 $\lambda e^{i\theta}$与 $C=\sqrt{2}$的连线的中点并记为 M, 于是

$$M=\frac{1}{2}(\lambda e^{i\theta}+\sqrt{2})$$

考察三点 $B=e^{i\frac{\pi}{4}}$, M, $D=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{\theta\frac{\pi}{4}}$, 易见 $M(1+i)=M\cdot\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{4}}=C\cdot D\cdot i+B$

由此得出 $(B-M)i=D-M$,

图 2.9

此式表明: 由向量$\overline{MB}$绕点 M 沿反时针方向旋转 90°之后得到向量$\overline{MD}$, 可见△BMD 为一等腰直角三角形, 直角顶点为 M。

证明 2: 因©ABC© ©ADC©, 故 B, D 不重合。如图 2. 10, 把两三角形放置在复平面上, 各顶点对应复数仍简记为表示对应点的字母, 且 $B=-1$, $D=1$, 于是

$$E-D=(A-D)(-i)=-(A-1)i$$

所以 $E=D-(A-1)i=1-(A-1)i$

同理 $C=B+(A-B)i=-1+(A+1)i$

设 EC 的中点为 M, 则

$$M=\frac{1}{2}(E+C)=i$$

这说明△MBD 为等腰直角三角形。

上面的简单证明说明酌情将图形放置在复平面能使问题得到简单处理。

图 2.10

复数还是研究正多边形性质的有力工具。这是因为若以正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心 O 为原点,外接圆的半径长为单位,射线 OA_n 为实轴正半轴,建立复平面,顶点 A_1 可与复数 $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ 对应,顶点 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 可分别与复数 $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \cdots, \varepsilon^n (=1)$ 相对应。这样就可将问题转化为关于复数单位根相关的一个代数问题,从而利用单位根的性质求解。

[例 2-65] (1991 年法国数学竞赛试题)①考虑从 C 到 C 的映射 P,定义如下

$$P(z)=z^5+a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4 是 4 个已知复数。记 $w_j=e^{-\frac{2\pi j}{5}}$,其中 j 表示从 0 到 4 的整数,证明:

$$P(w_0)+P(w_1)+P(w_2)+P(w_3)+P(w_4)=5$$

② 如果 $A_1, A_2. A_3, A_4, A_5$ 是平面上的 5 个点,作一个中心在 A_1 且给定半径为 R 的圆内接正五边形。证明存在五边形的一个顶点 S,使得

$$SA_1\cdot SA_2\cdot SA_3\cdot SA_4\cdot SA_5\geq R^5。$$

证明:①显然 $\sum_{j=0}^{4} w_j^n=0, n=1,2,3,4$, 于是

$$P(w_0)+P(w_1)+P(w_2)+P(w_3)+P(w_4)$$

$$=\sum_{j=0}^{4} w_j^5+a_4\sum_{j=0}^{4} w_j^4+a_3\sum_{j=0}^{4} w_j^3+a_2\sum_{j=0}^{4} w_j^2+a_1\sum_{j=0}^{4} w_j$$

$$=\sum_{j=0}^{4} 1=5。$$

② 不妨设 A_1 在复平面原点, $R=1$, 正五边形的顶点分别为 $1, w, w^2, w^3, w^4$, 其中 $w=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, 并设 A_2, A_3, A_4, A_5 对应于复数 z_2, z_3, z_4, z_5, 于是当 $k=0,1,2,3,4$ 时

$$|w^k-z_2|\cdot|w^k-z_3|\cdot|w^k-z_4|\cdot|w^k-z_5|$$

分别表示 5 个顶点到 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 距离的乘积。由①的结论知

$$\sum_{k=0}^{4}(w^k-z_2)(w^k-z_3)(w^k-z_4)(w^k-z_5)=5$$

所以 $\max\limits_{0\le k\le 4}|(w^k-z_2)(w^k-z_3)(w^k-z_4)(w^k-z_5)|$

$$\ge\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}|(w^k-z_2)(w^k-z_3)(w^k-z_4)(w^k-z_5)|$$

$$\ge\frac{1}{5}\left|\sum_{k=0}^{4}(w^k-z_2)(w^k-z_3)(w^k-z_4)(w^k-z_5)\right|=1$$

于是命题得证。

[例 2-66]　证明: 当 n 为奇数 $2m+1$, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 ⊙O 的内接正 n 边形, P 为 A_1A_n 上一点, 则

$$|PA_1|+|PA_3|+\cdots+|PA_{2m+1}|$$
$$=|PA_2|+|PA_4|+\cdots+|PA_{2m}|$$

证明: 设点 P 对应的复数为 z, 则所要证明的等式即

$$\sum_{k=0}^{m}|z-\varepsilon^{2k+1}|=\sum_{k=1}^{m}|z-\varepsilon^{2k}| \qquad (2\text{-}66\text{-}1)$$

其中 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$。

考虑到直接计算两边和式是困难的, 由于是取模运算, 我

们可以将两边各个加数乘一个模为 1 的复数，即将各个加数对应向量旋转一个适当角度，如图 2.11，因$\angle A_{2k+1}PA_1=\frac{2k\pi}{n}$，故顺时针旋转$\frac{2k\pi}{n}$，这时

$$\sum_{k=0}^{m}\left|z-\varepsilon^{2k+1}\right|=\sum_{k=0}^{m}\left|\bar{\varepsilon}^{k}\right|\left|z-\varepsilon^{2k+1}\right|$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\left|\bar{\varepsilon}^{k}z-\varepsilon^{k+1}\right|\geq\left|\sum_{k=0}^{m}\bar{\varepsilon}^{k}z-\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{k+1}\right|$$

即
$$\sum_{k=0}^{m}\left|z-\varepsilon^{2k+1}\right|\geq\left|\sum_{k=0}^{m}\bar{\varepsilon}^{k}z-\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{k+1}\right|$$

图 2.11

同样
$$\sum_{k=1}^{m}\left|z-\varepsilon^{2k}\right|=\sum_{k=1}^{m}\left|\bar{\varepsilon}^{(m+k)}\right|\left|z-\varepsilon^{2k}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left|\bar{\varepsilon}^{(m+k)}z-\bar{\varepsilon}^{m+k}\right|\geq\left|\sum_{k=1}^{m}\bar{\varepsilon}^{(k+m)}z-\sum_{k=1}^{m}\bar{\varepsilon}^{m+k}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=m+1}^{2m}\bar{\varepsilon}^{k}z-\sum_{k=m+1}^{2m}\varepsilon^{k+1}\right|$$

即
$$\sum_{k=1}^{m}\left|z-\varepsilon^{2k}\right|\geq\left|\sum_{k=m+1}^{2m}\bar{\varepsilon}^{k}z-\sum_{k=m+1}^{2m}\varepsilon^{k+1}\right|\qquad(2\text{-}66\text{-}3)$$

由于$\sum_{k=0}^{m}\bar{\varepsilon}^{k}z+\sum_{k=m+1}^{2m}\bar{\varepsilon}^{k}=\sum_{k=0}^{2m}\bar{\varepsilon}^{k}=0$

及 $\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{k+1}+\sum_{k=m+1}^{2m}\varepsilon^{k+1}=\sum_{k=0}^{2m}\varepsilon^{k+1}=0$，所以(2-66-3)式即

$$\left|-\sum_{k=0}^{m}\bar{\varepsilon}^{k}z-\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{k+1}\right|=\left|\sum_{k=0}^{m}\bar{\varepsilon}^{k}z-\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{k+1}\right| \tag{2-66-4}$$

由(2-66-2)，(2-66-4)相等，知(2-66-1)成立，证毕。

特别地，当 $n=3$ 时，对正三角形 $A_1A_2A_3$ 的外接圆 A_1A_3 上的任一点 P，恒有 $|PA_1|+|PA_3|=|PA_2|$。

最后，介绍关于复数的一个有趣问题。

[例 2-67] (《数学通讯》征解题) 设半径为 R 的球的球心在复平面 Z 的原点 O，MN 是垂直于复平面的球的直径，P 是球面上异于 M、N 的任意一点，直线 MP 与 NP 分别交复平面 Z 于 z_1 和 z_2，求证：$z_2=\dfrac{R^2}{z_1}$。

证明：过 M，N，P 三点的平面与球面的截线是半径为 R 的圆，与复平面 Z 的交线是一条直线 Oz_2z_1(如图 2.12)。

图 2.12

设 $z_1=r_1(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_2=r_2(\cos\theta+i\sin\theta)$，因为 $\triangle ONz_2\backsim\triangle OMz_1$，所以

$$\frac{ON}{Oz_1} = \frac{Oz_2}{OM}. \tag{2-67-1}$$

线段 Oz_1 的长为 $|z_1| = r_1$，线段 Oz_2 的长为 $|z_2| = r_2$，由 (2-67-1) 便得 $|z_1|\cdot|z_2| = r_1r_2 = R^2$，又 $z_1 = r_1(\cos\theta - i\sin\theta)$，所以 $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1(\cos\theta - i\sin\theta)} = \frac{1}{r_1}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{r_2}{r_1r_2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{z_2}{R^2}$，得证。

习　题　2.6

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，B 为定点，点 P 内分对角线 AC 为 $2:1$，当 D 点在以 A 为圆心，3 为半径的圆周上运动时，求 P 点的轨迹。

2. 证明：自⊙O 上任一点 P 到正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的各个顶点的距离的平方和为定值。

3. 以 $\triangle ABC$ 的各边为对应边，在三角形的外侧作 $\triangle ABD \backsim \triangle BCE \backsim \triangle CAF$，求证：$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的重心重合。

4. 如图 2.13，$\triangle ABC$ 和平面上一点 P，$|PC| = 27$，P 依次“跳”到关于 A, B, C 的对称位置 P_1, P_2, P_3 并继续下去，问经过 1991 次后所能跳到的地方离 P 点有多远？

图　2.13

2.7 染色方法

在数学竞赛中，很多问题借助染色对所研究的对象进行分类(一种颜色代表一类)，往往很容易解决，我们称此法为染色方法。用这种方法解题，主要是通过染色将问题中的隐蔽条件显示出来，再结合反证法，数学归纳法以及组合数学的一些基本定理，如抽屉原理，拉姆赛定理等，从而使问题获得简洁的解答。

本节主要就题中未出现染色元素的各种各样的组合问题，介绍染色方法的运用。用染色方法处理这类问题的思维模式为：通过对点、线或区域进行合理的染色，建立原问题的染色模型，然后再研究染色模型，获得原问题的解。

1. 对点染色

[例 2-68]　中国象棋盘的任意位置上有一只马，它跳了若干步正好回到原来的位置，问所跳的步数是奇数还是偶数？

解：我们把棋盘上所有格点染成黑、白两颜色之一，使同一横(竖)线上的格点黑白相间。

不妨设马从黑点出发，则一步只能跳到白点，下一步再从白点跳到黑点。因此，从开始的位置起相继经过的点的颜色是白，黑，白，黑，…，要想回到黑点，必须黑白成对，即经过偶数步回到原来的位置。

[例 2-69]　某人用三枚棋子在正方形棋盘上作对称跳游戏(即每次一枚棋子从 A 跳过另一枚棋子所在的位置 B，落在 A 关于 B 对称的位置上)。起始三格棋子位于小方格(图

2.14 中有阴影的小方格)的三个顶点上,问棋子作若干次这样的对称跳能否落在原来的小方格的第四个顶点上?

图　2.14

解:结论是否定的,将表格中每个格点按图中方式涂上两色(实点表示黑色,空点表示白色)。并设开始时三枚棋子落在白点上。

我们证明棋子仅能落在白点上,即关于黑点做对称时,白点变为白点。为此,只需证明关于白点做对称时,黑点变为黑点。设 A 是黑点,B 是白点,而 A_1 是点 A 在关于点 B 做对称时的象。那么点 A_1 是黑点当且仅当 $\overline{A}A_1 = 2me_1 + 2ne_2$,其中 m, n 是整数。显然

$$\overline{A}A_1 = 2\overline{A}B = 2(me_1 + ne_2)$$

因此 A_1 是黑色点。

这就说明棋子不会落在原来小方格的第四个顶点上。

[例 2-70]　(第 11 届前苏联奥林匹克竞赛试题)已知大小为 100×100 方格的正方形片,引进某些沿着方格边而又与

方格无公共点的本身不相交的折线。这些折线严格地在正方形内部,而端点必须在边界上。证明:除了正方形的顶点外,还能求出别的结点(正方形内部或边界上)不属于这些折线中的任意一条。

证明:如图 2.15,把正方形纸片上的结点相间染色(实点表示黑色点,空点表示白色点)。

因为任意单位线段的两端点具有不同颜色,所以同一颜色端点的折线包含奇数个结点,而不同颜色端点的折线包含偶数个结点。注意到边界上的 4×99 个结点(不算顶点)黑白均分,因此以边界上的结点为两端点的折线中,两个黑色端点的折线和两个白色端点的折线的数目相等,从而以同一颜色为端点的折线共有偶数条。所以所有满足条件的折线共包含偶数个结点。但是,在整个正方形片上,除顶点外,只包含奇数个结点。因此,其中至少有一个结点不在折线上,命题得证。

图 2.15

2. 对线段染色

大多数对线段染色的问题比对点的染色问题复杂一些。在建立染色模型后,需用到下面三个著名的定理。

定理 2.6 设有六个点,每两点之间都用线段相连,并且每条线段上任意涂上红、蓝两色中的一种,那么,其中必有一个同色三角形。

证明:设 $A_i(0\leq i\leq 5)$ 是给定的六个点。先取定一点,比如 A_0,把点 A_0 与其余各点连成五条线段 $A_0A_i(1\leq i\leq 5)$。用红、

蓝两色任染这五条线段，由抽屉原理知，这五条线段中，至少有 3 条被染了同一种颜色，不妨假设这三条线段是 A_0A_1，A_0A_2，A_0A_3，且都染了红色，这时，考察△$A_1A_2A_3$ 的三边，只有下面两种可能：

① 这三边都染了蓝色，这时△$A_1A_2A_3$ 就是一个同色三角形，命题成立。

② 三条边中至少有一条边染了红色，不妨设 A_1A_2 是染了红色，这时△$A_0A_1A_2$ 就是一个三边都是红色的三角形了，因而命题也成立。

由此定理得证。

定理 2.6 或其等价形式曾两次被用作数学竞赛试题(1947 年匈牙利和 1953 年普特南)，引起过人们极大的兴趣。现已成为解决染色问题的基础结论。我们称其为染色基本定理。

值得注意的还有，定理 2.6 的证明过程中还用到了一种有效的思考方法，就是逐步缩小所要考察对象的范围，从而把复杂问题逐步化为简单问题进行处理的方法。为叙述方便起见，我们把这种思考方法称做为弃留法。具体地说在定理 2.6 的证明过程中，一开始便放弃了其余线段，仅保留了五条线段 $A_0A_i(1\leq i\leq 5)$ 进行考察。然后再放弃了 A_0A_3，A_0A_4 两条线段，仅考察三条线段 A_0A_1，A_0A_2，A_0A_3，转而考察△$A_1A_2A_3$，从而达到了目的。

定理 2.7　假设有 m 个点，在各线段上任意染 n 色，存在同色三角形，那么，对$(n+1)(m-1)+2$ 个点，在各线段上任意染 $n+1$ 色，也必有同色三角形。

证明：设 A_0，A_1，…，$A_{(n+1)(m-1)+1}$是已知的$(n+1)(m-1)$

$+2$ 个点，先取定一点 A_0，把点 A_0 与其它各点连成 $(n+1)(m-1)+1$ 条线段，并任意染 $n+1$ 色，由抽屉原理知，其中必有 $\frac{(n+1)(m-1)+1}{n+1}+1=m$ 条线段是同色的，不妨假设 $A_0A_1, A_0A_2, \cdots, A_0A_m$ 都染第 $n+1$ 种颜色，这时考察 A_0A_1, $A_0A_2, \cdots, A_0A_m$ 的 m 个端点 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 之间线段的染色情况，实际上仅有下列两种可能：

① 在这些线段中至少有一条染了第 $n+1$ 种颜色，比如 A_1A_2，那么 $\triangle A_0A_1A_2$ 就是所求的同色三角形了，命题获证。

② 与情形①相反，这些线段中没有一条染了第 $n+1$ 种颜色，于是只能染 n 种颜色，因此这个问题就归结为 m 点染 n 色的问题了，由题设即得证明。

我们用记号 $R(n)$ 表示任意染 n 色必有一只同色三角形的最少点数，比如 $R(1)=3$, $R(2)=6$，那么一般的 $R(n+1)$ 和 $R(n)$ 有什么关系呢？由定理 2.7 易得下面的定理。

定理 2.8 $R(n+1)\leq(n+1)[R(n)-1]+2$。

证明：由记号 $R(n)$ 的含义可知，$R(n)$ 个点染 n 色，必有同色三角形，所以由定理 2.7 可以得到 $(n+1)[R(n)-1]+2$ 个点染 $n+1$ 色，必有同色三角形。又因为记号 $R(n+1)$ 表示染 $n+1$ 色必有同色三角形的最少点数，所以 $R(n+1)\leq(n+1)[R(n)-1]+2$。

定理 2.7 和定理 2.8 都是拉姆赛定理的一些简单形式，也是最常用的形式。因此，我们就称他们为拉姆赛定理。

由这理 2.6 知 $R(2)\leq6$，由定理 2.8 易知 $R(3)\leq17$, $R(4)\leq66$, $R(5)\leq327$, $R(6)\leq1958$。这些结果是有用处的。当然，这些结果是不精确的，事实上，易证 $R(2)=6$，已证明

$R(3)=17$, $R(4)=65$, $R(5)\leq 322$, $R(6)\leq 1928$。但到目前为止, 当 $n\geq 5$ 时, $R(n)$ 的值还是未知的。

下面看对线段染色解题的实例。

[例 2-71]　(第 6 届 IMO 试题) 17 位科学家每一个和其他人都通信。在他们的书信往来中仅仅讨论三个题目, 而每两个科学家仅仅讨论一个题目, 证明: 至少有三个科学家, 他们互相讨论同一个题目。

分析: 易见, 原问题等价于下面的染色模型:

“设有 17 个点, 每两点之间都用线段相连, 且每条线段上都染了红、蓝、黄三色中的任一色, 那么其中必有一只同色三角形。”

这个问题正好就是定理 2.6 和定理 2.7 的简单推论 $R(3)\leq 17$ 的另一种表达形式, 因此命题得证。

[例 2-72]　(第 20 届 IMO 试题) 一个国际社团的成员来自六个国家, 共有成员 1978 人, 用 1, 2, …, 1977, 1978 编号, 请证明, 该社团至少有一个成员的顺序号数, 等于他的两个同胞的顺序号数之和, 或等于一个同胞的顺序号数的二倍。

证明: 把 1978 个数任意分成六个数集 $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$, 对应于 1978 个数, 在圆周上取点 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{1978}$, 用 6 种颜色 $C_1, C_2, \cdots, C_6$ 之一染这些点间的两两连线, 染色方法规定如下: 当且仅当 $|i-j|\in M_k$ 时, 线段 A_iA_j 染 C_k 色。由 $R(6)\leq 1958<1978$, 因此由拉姆赛定理知此种染色方案一定有一同色三角形 $\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$, 不妨假定这个三角形的三边均为 C_1 色, 并设 $i_1<i_2<i_3$, 由上规定的染色方法可知 $i_2-i_1\in M_1$, $i_3-i_2\in M_1$, $i_3-i_1\in M_1$, 但 $(i_2-i_1)+(i_3-i_2)=i_3-i_1$, 因此若 $i_2-i_1\neq i_3-i_2$ 时, M_1 中有一数 i_3-i_1, 它是 M_1 中另

外两数 $i_2 - i_1, i_3 - i_2$ 之和;若 $i_2 - i_1 = i_3 - i_2$ 时,M_1 中有一数 $i_3 - i_1$,它是 M_1 中数 $i_2 - i_1$ 的 2 倍。因此命题获证。

[例 2-73] (1976 年波兰数学竞赛试题)平面上有 6 个点,任何三点都是一个不等边三角形的顶点,则这些三角形中有一个的最长边又是另一个三角形的最短边。

分析:容易想到定理 2.6,这六个点两两连线二染色其边,则一定存在一个同色三角形。为达到题意要求,现采用一种有特殊限制的二染色方法:每一三角形的最大边染红色,剩下未染红的线段都染蓝色(注意染色的顺序:各个三角形的最大边先染红)。

对于这种特殊的染色方法,当然也有一个同色三角形。由于每个三角形都有红边,因此不可能出现蓝色三角形。也就是说,同色三角形必是红色三角形。这个红色三角形的最小边就符合题设结论,命题得证。

下面再看另外两个不同类型(不需应用定理 2.6～2.8)的采用对线段染色的方法来解的问题。

[例 2-74] (1991 年加拿大选拔试题)6 个人参加一个集会,每两个人或者互相认识或者互不认识。证明:存在两个集合,每个集合有三人组成,在同一个集合中,成员互相认识,或者互不认识(这两个集合可以有公共成员)。

证明:将每个人用一个点表示,如果两个人认识就在相应的两个点之间连一条红线,否则就连一条蓝线。要证明在所得的图中存在两个同色的三角形。

设有 x 个同色的三角形,则边不全同色的三角形有 $C_6^2 - x = 20 - x$ 个。

如果从一点发出的两条线同色,我们称它们构成一个同

色角。在每个同色三角形中,每个顶点处有一个同色角,共有三个同色角,而在非同色三角形中,只有一个同色角,于是共有 $3x+(20-x)=20+2x$ 个同色角。

另一方面,设从顶点 A 出发的五条边中有 r 条红,5- r 条蓝,则在 A 处有

$$C_r^2+C_{5-r}^2\geq C_2^2+C_3^2=4$$

个同色角。6 个顶点处至少有 $4\times 6=24$ 个同色角,于是

$$20+2x\geq 24$$

从而 $x\geq 2$,即至少有两个同色三角形。

注:①例 2-74 实质是定理 2.6 结论的一个加强。

②例 2-74 的处理方法将计算和论证巧妙地结合在一起,通过从两种不同角度计算和估计同一量的数量而达到目的,此种思考方法是组合数学中常用的思考方法。

[例 2-75] (第 10 届美国竞赛试题)某个县下属的每两个区都恰好由汽车、火车、飞机三种交通方式中的一种直接联系。已知在全县中三种交通方式全有,但没有一个区三种方式全有;并且没有任何三个区中两两联系的方式完全相同。试问这个县至多有几个区?

解:将每一个区用一个点表示(我们称之为顶点)。若两个区的交通工具是汽车,就将相应两顶点之间的连线(我们称之为边)涂上红色;若是火车或飞机,则将相应的边涂上蓝色或白色。

这样就得到一个经过染色的图,根据题意这个图具有如下性质:

① 整个图中三种颜色的边全有;

② 每一个顶点引出的边中,至多只有两种颜色;

③ 在这个图中不存在同色三角形。

现来证明：这个图的顶点个数 n 至多为 4，即这个县至多有 4 个区。

假设 $n \geq 5$，即至少有五个顶点 A，B，C，D，E。根据②，每个顶点引出的边中一定没有某一种颜色，若一个顶点引出的边中没有红色的，我们就把这一类顶点叫做非红类顶点，同样可定义非蓝类顶点，非白类顶点。当然，某一个顶点也可能同时属于两类，例如某顶点发出的边都是红色的，那么这个顶点既属于非蓝类，又属于非白类。由抽屉原理易见，至少有一类至少含有两个顶点。

如果有三个顶点在同一类中，比如说 A，B，C 都在非红类中，那么由①，还有不在这一类中的顶点 D，不妨设 D 在非蓝类中。这时 DA 既不是红的，也不是蓝的，所以 DA 一定是白的。同理 DB，DC 也一定是白的。如果 AB 是白的，这时 $\triangle ABD$ 是同色(白色)三角形，与③矛盾。又因为 A，B 属非红类，则 AB 是蓝的。同理 AC，BC 也是蓝的，这时又出现 $\triangle ABC$ 是同色(蓝色)三角形，仍与③矛盾。

如果每一类中至多有两个顶点，那么由于至少有一类含两个点，不妨设 A，B 在非红类中，又不妨设 AB 是蓝的，从而必有其它顶点 C 在非蓝类中，由 A 在非红类，C 在非蓝类得 AC 是白的，同样 BC 也是白的，从而还有一点 D 在非白类中，于是 AD 和 BD 只能是蓝的，此时 $\triangle ABD$ 是同色(蓝色)

图 2.16

三角形，与③矛盾。

综上所述，$n \leq 4$。

$n=4$ 的情况是可能的，如图 2.16 四边形 ABCD，四边 AB, BC, CD, DA 涂红色，对角线 AC 涂蓝色，另一条对角线 BD 涂白色，则满足题设要求。

3. 对区域染色

[例 2-76] （第 21 届前苏联奥林匹克试题）在 1987×1987 大小的正方形表格的每一个格子中写上绝对值不超过 1 的数，使利润在任意的 2×2 方格中的四数之和都等于零，求证：表格中所有数的和不超过 1987。

证明：按图 2.17 中的方法染色（阴影部分表示染黑色），

图 2.17

并记黑格子的集合为 A，集合 A 关于表格对角线对称的格子集合为 B，$C=A \cap B$，D 是不属于 A，又不属于 B 的格子集合，记 A, B, C, D 的格子中数的和分别为 a, b, c, d，则表中所

有数之和 $S=a+b+c+d$。由题意 $a=b=0$，而 C 和 D 的格子总数恰为对角线上的格子数，即为 1987，因此 $|c|+|d|\leq 1987$，从而有 $|S|=|c-d|\leq|c|+|d|\leq 1987$，因此命题得证。

[例 2-77] (第 4 届前苏联奥林匹克试题)把正三角形划分成 n^2 个同样的小正三角形，把这些小正三角形的一部分标上号码 1, 2, …, m，使得号码相邻的三角形有相邻边。证明：$m^2\leq n^2-n+1$。

证明：将 n^2 个小正三角形如图 2.18 那样染色。这时黑三角形共有 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个，而白三角形共有 $1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个。

显然两个有相邻号码的三角形染有不同颜色，因而标号码的黑三角形仅能比白三角形多 1，所以编号的三角形数不超过 $2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n+1$ 个。

图 2.18

[例 2-78] (第 26 届 IMO 试题)超级象棋是在 12×12 方格棋盘上行走的。它的马是从 3×4 矩形的一个角上的方格跳到对角的方格。那么一个马跳到棋盘上每一个方格一次且仅一次，然后跳回开始的方格，是否可能？

解：这种路线是不存在的，下面用反证法给出证明。

假设存在符合要求的路线。将棋盘相间染成黑白二色(如图 2.19)。显然马从黑格跳一步必到白格，从白格必定跳到黑格。不妨设马从某一黑格开始起跳，因马到每个方格一次且仅

图 2.19

一次,因而马偶数步所到方格为全体黑格。

再令 A= {第 1, 2, 6, 7, 11, 12 行的方格}

B= {第 3, 4, 5, 8, 9, 10 行的方格}

显然,马从 A 中必跳到 B 中。按规定的跳法,马从 B 中有可能仍跳到 B 中,但 B 与 A 的方格数是相等的,而马到每个方格一次且仅一次,因此若马有从 B 跳到 B 的情况,则必有从 A 跳到 A 的情况,这是不可能的。所以马从 B 中必跳到 A 中。这时,马偶数步所到的方格为 A 中全体方格或 B 中全体方格。但这是不可能的,因此无论 A 中全体方格还是 B 中全体方格,都不可能是全体黑格,因此,符合要求的路线是不存在的。

习 题 2.7

1. 在 5× 5 棋盘的每个方格上息着甲虫,在某一时刻所有的甲虫向

相邻(沿水平线或竖直线方向)方格爬行,这时一定出现剩余的空格吗?

2. 空间六点,两两连线,二染色其边,证明:至少存在2个同色四边形。

3. 设n为一正数,且$A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$是某个集合B的子集,设

(a) 每一个A_i恰含有2n个元素;

(b) 每一$A_i \cap A_j (1 \le i < j \le 2n+1)$恰含有一元素;

(c) B中每个元素属于至少两个子集A_i。

问对怎样的n,可以对B中的每一元素贴一张写有0或1的标签,使得每个A_i中恰含有n个贴上了写有0的标签的元素。(第29届IMO预选题)

4. 一次聚会上,每两个人致意的方式为四种方式(点头、握手、接吻、拥抱)中的一种,康迪和瑞迪接吻,没和萨迪接吻。对每三个人,两两致意的方式或者全相同或者全不相同。问这次聚会至多有多少人?

5. 用不相交的对角线把凸n边形划分成三角形,并且在多边形的每个顶点汇集奇数个三角形,求证:n是3的倍数。

2.8 对应方法

“对应”不仅是一个极基本的数学概念,还作为一种方法和技巧,在数学研究和解题中发挥着重要作用。对应,是联系陌生问题和熟悉问题的桥梁,往往能促成问题的转化,使之变得明了和具体。用对应方法解题的关键在于构造对应关系,而这没有一般的通法,必须根据问题的具体特点进行分析而定。下面通过实例说明对应方法在解题中的运用。

1.“一一对应”方法

如果集合X和集合Y之间存在一一对应f,那么集合X

与集合 Y 的元素个数相等。这个简单的事实,在解题中有着十分广泛的应用。

[例 2-79] n 个选手参加淘汰赛,需要进行多少场比赛,才能决出冠军?

分析:如果先算出第一轮的场数,第二轮的场数,…,然后相加,是比较麻烦的。简便的解法是注意每场比赛恰好淘汰一名选手,即比赛的场次与被淘汰的选手是一一对应的。由于一共淘汰了 $n-1$ 名选手才决出冠军,所以比赛的场数也是 $n-1$。

[例 2-80] 有多少个满足条件

$$1\leq i< j\leq k< h\leq n+1$$

的四元有序(整)数组(i, j, k, h)

解:作映射 $(i, j, k, h)\to(i, j, k+1, h+1)$

这映射是从集 $X=\{(i, j, k, h)|1\leq i< j\leq k< h\leq n+1\}$到集合 $Y=\{(i, j, k', h')|1\leq i< j< k'< h'\leq n+2\}$的一一对应,所以$|X|=|Y|$(这里$|X|$表示集合 X 的元素个数)

而$|Y|$显然是集合$\{1, 2, \cdots, n+2\}$的四元子集的个数,即 C_{n+2}^4,所以$|X|=C_{n+2}^4$。

[例 2-81] (1988 年全国联赛试题)如果从数 1, 2, …, 14 中,按由小到大的顺序取出 a_1, a_2, a_3,使同时满足 $a_2-a_1\geq 3$ 与 $a_3-a_2\geq 3$,那么所有符合上述要求的不同取法有多少种?

解:令 $S=\{1, 2, \cdots, 14\}, S'=\{1, 2, \cdots, 10\}$;

$T=\{(a_1, a_2, a_3)|a_1, a_2, a_3\in S, a_2-a_1\geq 3, a_3-a_2\geq 3\}$

$T'=\{(a_1', a_2', a_3')|a_1', a_2', a_3'\in S', a_1'< a_2'< a_3'\}$

作对应$(a_1, a_2, a_3)\to(a_1', a_2', a_3')$,这里 $a_1'=a_1, a_2'=a_2-2, a_3'$

$= a_3 - 4 (a_1, a_2, a_3 \in T)$

容易验证这是 T 与 T' 之间的一个一一对应。从而 $|T| = |T'|$。

从而问题转化为求 $|T'|$，即为在 S 集中选取三个不同元素的组合数 C_{10}^3。

[例 2-82]　(1991 年加拿大奥林匹克试题) 将△ABC 的每一边 n 等分，过各分点作边的平行线，在所得的图形中有多少个平行四边形?

解：如图 2.20。首先考虑边不与 BC 平行的平行四边形。延长这种平行四边形的边，与 BC 相交于 BC 边上顺次的四个分点。在特殊情况，第二个交点与第三个交点可能重合(即这个平行四边形的一个顶点)。如果将 BC 边上的分点依次记为

图　2.20

$$B_1 = B, B_2, B_3, \cdots, B_n, B_{n+1} = C$$

那么每一个边不与 BC 平行的平行四边形，对应于一个有序四元数组(即四个分点的下标)

$$(i, j, k, h), \text{其中 } 1 \leq i < j \leq k < h \leq n+1 \qquad (2\text{-}82\text{-}1)$$

这是一个一一对应，因而两者个数相等。而由例 2-80 知(2-82-1)的个数为 C_{n+2}^4。因此图 2.20 中有 C_{n+2}^4 个边不与 BC 平行的四边形。同样可考虑边不与 AB 或 BC 平行的四边形。所以，图中共有 $3C_{n+2}^4$ 个平行四边形。

[例 2-83]　设线段 AB 的两个端点分别为有理点和无理点，在线段 AB 内作 1992 个分点，于是把线段 AB 依次地分

为 1993 个小线段, 这些小线段的端点如果一个为有理点, 另一个为无理点, 则称之为标准线段, 试证: 不论分点如何选取, 标准线段的条数总是奇数。

解: 我们将 AB 所有分点中的有理点与 0 对应, 无理点与 1 对应。对于从 A 到 B, 序号为 $k(0\leq k\leq 1992)$ 的点, 若是有理点, 则用$(k, 0)$ 表示; 若是无理点, 则用$(k, 1)$ 表示, 并用直角坐标平面的点图示。显然, 有理点都在 x 轴上, 无理点都在直线 $y=1$ 上, 再依次连结 A, B 和各分点, 便得到一条端点为

图 2. 21

A, B 的折线(如图 2. 21), 于是分法的全体与折线段的全体建立了一一对应关系。

注意到图中的斜线段与标准线段是一一对应的, 由于有理点都在 x 轴上, 无理点都在 $y=1$ 上, 又折线始点在 x 轴上, 终点在 $y=1$ 上, 故斜线的条数必须是奇数, 至此证明了题中的结论。

[例 2-84] (第 29 届 IMO 备选试题) 一家工厂有 $n\geq 3$ 个工作, 按照工资的递增次序标上 1 至 n。n 个求职者, 按照其能力递增的次序标上 1 至 n。当且仅当 $i\geq j$ 时, 求职者 i 可以

担任第 j 种工作。求职者按随机的次序逐一到达，每个人依次被雇到他或她可能适合的，工作级别低于已经雇了人的工作中的最高工作(在这规则下，工作 1 总有人去干，而且在这以后雇佣结束)。证明：求职者 n 与 $n-1$ 被雇佣的机会相等。

证明：设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为求职者按来到工厂的先后排成的序列，以 x_p 与 x_q 分别表示求职者 n 与 $n-1$。每个序列都会有若干人被雇，以 x_r 表示最后一个受雇的，即得到职务 1 的人。

若 p, q 均大于 r，则 n 与 $n-1$ 均已被雇；若 p, q 均小于 r，则两者均未被雇。余下的序列分为两个集：

$$A=\{(x_1, \cdots, x_p, \cdots, x_r, \cdots, x_q, \cdots, x_n)\}$$

$$B=\{(x_1, \cdots, x_q, \cdots, x_r, \cdots, x_p, \cdots, x_n)\}$$

分别表示 n 与 $n-1$ 两者一个被雇而另一个未被雇。若 A 与 B 能建立一一对应，命题即得证。

定义 $f: A \to B$ 为 x_q 与 x_p 互换位置。这个定义是有意义的：当 B 的元 x_p 与 x_q 交换后，即 n 接受 $n-1$ 的工作，其余人工作不变，从而成为 A 的元。当 A 的元 x_p 与 x_q 互换后，有两种可能：(i) $p=1$，即求职者 n 接受工作 n，x_q 换到 x_p 的位置时可以改为接受工作 $n-1$，其余人受聘情况不变；(ii) $p>1$ 时，n 干的工作小于等于 $n-1$，x_q 换来后仍可受聘，即 A 的元在 f 作用后成为 B 的元。以上过程也同时证明了 f 是可逆映射，从而为一一对应，得证。

[例 2-85]　(1981 年美国纽约市竞赛试题) 把前 n 个自然数任意排成一行 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，求这种排列中逆序数的平均值。这里，当 $j<k$ 时，如果 $i_j>i_k$，则称排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 有一个逆序。

解：把排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$和它的反序排列$(i_n, i_{n-1}, \cdots, i_2, i_1)$配成对（它们之间是一对一的），于是所有排列配成$\frac{n!}{2}$个对，任意两个不大于$n$的自然数$m>k$恰好在每个对的一个排列中组成一个逆序。因为满足$1 \leq k < m \leq n$的自然数对$k, m$共有$C_n^2$个，所以在每个对中排列的逆序总数为$C_n^2$。因此对每对排列，逆序数的平均值为$\frac{1}{2}C_n^2$。这也是所有排列的逆序数的平均值。

[例 2-86]　(第 30 届 IMO 试题)设n是正整数。我们说集合$\{1, 2, \cdots, 2n\}$的一个排列$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$具有性质$P$，如果在$\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$当中至少有一个$i$使得$|x_i - x_{i+1}| = n$。求证对于任何$n$，具有性质$P$的排列比不具有性质$P$的排列多。

解：考查如下的集合

$A = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{2n}) \mid (x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$具有性质$P\}$

$B = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{2n}) \mid (x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$不具有性质$P\}$

$C = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{2n}) \mid$恰有某一个$i$使$|x_i - x_{i+1}| = n$而且$i \neq 1\}$

很明显，C是A的子集，而且$(n+1, 1, 2, \cdots, n, n+2, \cdots, 2n)$这个排列在$A$中而不在$C$中，因此$C$是$A$的真子集。这样，要证$A$的元素比$B$的元素多，只用证明$B$和$C$的元素一样多就可以了。

现在我们来做一个B和C之间的一一映射。对任何$y = (y_1, y_2, \cdots, y_{2n}) \in B$，有$|y_2 - y_1| \neq n$。因此与$y_1$相差为$n$的数（这个数是唯一的），一定是某个$y_k, k > 2$。把$y_1$放到$y_k$的左边，得到一个新的排列$y' = (y_2, \cdots, y_{k-1}, y_1, y_k, \cdots, y_{2n})$这个

排列一定是 C 中的排列。令 $f(y)=y'$。这样就可以得到一个从 B 到 C 的映射。不难证明这个映射恰好是 B 与 C 之间的一一映射,可见 B 和 C 具有同样多的元素。

2. **单射方法**

若 $f: A\to B$ 是单射,则 $|A|\leq|B|$。换句话说,如果 $|A|>|B|$,那么从 A 到 B 的映射 f 一定不是单射。这是解题时常用的方法。

常见的抽屉原理,其实就是一种单射(关于抽屉原理的应用,下章将予以专题介绍)。

[例 2-87] 设 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$, $S=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$。若(i) S 中每 r 个元交集不空;(ii)每 r+1 个元的交集为空集。问:①$|A|$至少是多少?②当$|A|$最小时,集$|A_i|$为多少?

解:①考虑足标集$\{1, 2, \cdots, k\}$的任一 r 元子集$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$,在 $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}$ 中任取一个元素 a。作映射 f:

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}\to a$$

则 f 是足标集的 r 元子集的集合到 A 的一个单射。事实上,若$\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$也对应于 a,则会形成 r+1 个子集的交不空,矛盾。

因此$|A|$不少于足标集的 r 元子集的个数,即$|A|\geq C_k^r$。

② 考虑任一 A_i,在 S 中任取其余 r 个集,它们的交集至少有一个元(不空)。而此交集与 A_i 取交为空集。由于有 C_{k-1}^r 种不同取法。因而$|A_i|\leq|A|-C_{k-1}^r$。当$|A|=C_k^r$时,$|A_i|\leq C_{k-1}^{r-1}$。

另一方面 A_i 与 S 中任选 r-1 个其余的集取交,至少有一个元,从而$|A_i|\geq C_{k-1}^{r-1}$。

这说明，当 $|A|$ 取最小值 C_n^k 时，每个 A_i 的阶 $|A_i|$ 都是 C_{k-1}^{r-1}。

注：例 2-87 题的结论可以解许多问题。如第 13 届莫斯科竞赛试题："某城市有公共汽车 10 条线路，现知沿其中 9 条线路可走遍所有车站，但沿其中任何 8 条线路不能走遍所有车站。问至少有多少个不同的车站。"应用此题①的结论即解得至少有 45 个车站。

[例 2-88]　考虑方程组

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\
&\cdots\cdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0
\end{aligned}
$$

其中系数 a_{ij} 为整数，不全为 0。证明：在 $n\geq 2m$ 时，有一组整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足

$$0<\max|x_i|\leq n(\max|a_{ij}|)。$$

证明：先假定 $n=2m$。设 $A=\max|a_{ij}|$，$B=mA$，集合

$$X=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid |x_j|\leq B, j=1, 2, \cdots, n\}$$

$$Y=\{(y_1, y_2, \cdots, y_m) \mid |y_i|\leq nAB, i=1, 2, \cdots, m\}$$

映射 f：

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \quad (\text{其中 } i=1, 2, \cdots, m)$$

是从集 X 到集 Y 的映射(因为 $|y_i|\leq|a_{i1}|\cdot|x_1|+|a_{i2}|\cdot|x_2|+\cdots+|a_{in}|\cdot|x_n|\leq nAB$)

由于 $|X|=(2B+1)^n=(2mA+1)^{2m}=(4m^2A^2+4mA+1)^m>(2nAB+1)^m=|Y|$

所以 f 一定不是单射。也就是说，X 中必有两个不同元素

$$(x_1', x_2', \cdots, x_n'), (x_1'', x_2'', \cdots, x_n'')$$

具有相同的像。令

$$x_j = x_j' - x_j'',\quad j = 1, 2, \cdots, n。$$

则$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是方程组的解,并且

$$0 < \max|x_j| \leq \max|x_j'| + \max|x_j''| \leq 2B = nA。$$

如果 $n > 2m$,根据上面所证,方程组有解$(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}, 0, \cdots, 0)$满足

$0 < \max|x_j| \leq 2mA < nA$。　证毕。

此题是从反面运用单射的概念来解题的。

[例 2-89]　(第 31 届 IMO 国家集训队训练题)设 $M = \{1, 2, \cdots, 20\}$,对于 M 的任一九元子集 s,$f(s)$取 1 至 20 中的一个整数($1 \leq f(s) \leq 20$)。证明:存在 M 的一个十元子集 T,使得所有的 $k \in T$,都有

$$f(T \backslash \{k\}) \neq k。$$

证明:对于 M 的任一十元子集 T,若存在 $k \in T$,使得

$$f(T \backslash \{k\}) = k$$

就称 T 为"好集"。

作映射 f:好集 $T \to T \backslash \{k\}$,$(k \in T)$

则这个映射显然是一个从所有好集的集合到 M 的九元子集的集合单射。从而好集 T 的个数$\leq C_{20}^{9}$。

又 M 的十元子集的个数为 C_{20}^{10},且 $C_{20}^{10} > C_{20}^{9}$,所以,M 中必存在一个十元子集不是好集,也就是存在一个十元子集 T,对于任一 $k \in T$,都有 $f(T \backslash \{k\}) \neq k$,得证。

[例 2-90]　(第五届国家集训队选拔试题)在一个车厢中,任何 $m(m \geq 3)$个旅客都有唯一的公共朋友(当甲是乙的朋友时,乙也是甲的朋友。任何人不作为他自己的朋友)。问在这车厢中,朋友最多的人有多少个朋友?

解:设朋友最多的人有 k 个朋友,显然,$k \geq m$。若 $k > m$,

设 A 有 k 个朋友 $B_1, B_2, \cdots, B_k$, 并记 $S = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$。

设 $B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}$ 是从 S 中任取的 $m-1$ 个元素, 则 A, $B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}$ 这 m 个人有唯一的一个公共朋友, 记为 C_i。因 C_i 是 A 的朋友, 故 $C_i \in S$。这说明: S 中的每 $m-1$ 个元素对应着 S 中的唯一确定的一个元素。

又若 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\} \neq \{B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$, 且 $\{A, B_{i_1}, \cdots, B_{i_{m-1}}\}$ 与 $\{A, B_{j_1}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 对应的唯一的公共朋友分别为 $C_i, C_j \in S$, 则必有 $C_i \neq C_j$。否则 $\{B_{i_1}, \cdots, B_{i_{m-1}}\} \cup \{B_{j_1}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 至少有 m 个元素, 而它们至少有两个朋友 A 和 C_i, 此与已知矛盾。

这样一来, 我们上述的对应就是一个单射。因此 S 中的 $m-1$ 元子集的个数

$$C_k^{m-1} \leq k \tag{2-90-1}$$

但 $m \geq 3$ 时, $m-1 \geq 2$, 这时

$$C_k^{m-1} > C_k = k \tag{2-90-2}$$

显然(2-90-2)与(2-90-1)矛盾。这说明 $k > m$ 不能成立。

故朋友最多的人的朋友个数的最大值为 m。

对应方法还有非常广泛的应用, 限于篇幅, 本节不再作讨论, 有兴趣的读者请参考王子侠、单𫍯教授编著的《对应》(科学技术文献出版社 1989 年)一书, 里面有很多十分有趣的结果。

习题 2.8

1. 从集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中选取 3 个元素 i, j, k, 使满足(i) $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$; (ii) $1 \leq i < j < k \leq n$, 且 $j - i \geq m, k - j \geq m$。问各有多少种不同的取法?

2. 求证:从实数数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1}$ 中可以选出一个有 $m+1$ 项的递增子列,或一个有 $n+1$ 项的递减子列(子列中各项的先后与原数列相同)。

3. 设 A_i 是有限个集, $i=1,2,\cdots,n$。若成立 $\sum_{1\le i<j\le n}\frac{|A_i\cap A_j|}{|A_i|\cdot|A_j|}<1$, 则存在 $a_i\in A_i$, 使 $i\neq j$ 时, $a_i\neq a_j$。

4. 11 人共同看管一个军火库,库门上加了一些锁,并发给每个人若干钥匙。为能做到其中任何 6 人在一起都能打开所有锁,而任何 5 人在一起不能打开所有锁,门上至少应装多少锁?应怎样配钥匙?(波兰竞赛试题)

5. 由 $8\times 8\times 8$ 个单位正方体构成大的正方体,有多少条直线可以穿过 8 个单位正方体的中心。

2.9 对称分析法

数学中的对称性,随处可见。它不仅是一种审美标准,而且是一种探索的武器。在解竞赛题时,若能分析和挖掘题中的对称因素,并利用对称性设计相应的解法,往往能避开一些难点,使问题得以顺利解决。这种通过分析对称性解题的方法叫做对称分析法。下面通过具体的素材展示对称分析方法的力量与美。

1. 分析对称性,可发现简解和妙解

一个问题中存在对称性,可提供减少工作量的办法。

[例 2-91] 给定正数 a, b, c, d, 证明

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b}\geq a^2+$$

$b^2+c^2+d^2$。

分析: 问题中 a, b, c, d 的地位完全对称, 因此, 如能证明关于 a, b, c 的一个局部结果:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \qquad (2\text{-}91\text{-}1)$$

便可。

证明: 注意到(2-91-1)是一个齐次的不等式, 不妨设 $a+b+c=1$。现在我们来证明 $a+b+c=1$, $a, b, c\in R^+$ 时

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \qquad (2\text{-}91\text{-}2)$$

由 Cauchy 不等式

$$(a^2+b^2+c^2)^2\leq(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)=(a^3+b^3+c^3) \qquad (2\text{-}91\text{-}3)$$

$$3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2=1 \qquad (2\text{-}91\text{-}4)$$

由(2-91-3), (2-91-4)即得(2-91-2), 得证。

[例 2-92] 设 $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$, 求证

$$abc(1-a)(1-b)(1-c)\leq\left(\frac{1}{4}\right)^3。$$

证明: 由于不等式左边是对称式, 所以只要能证明

$$a(1-a)\leq\frac{1}{4}$$

即可。因 a 和 $1-a$ 都是正数, 所以

$$a(1-a)\leq\left(\frac{a+(1-a)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}。$$

由对称性直接可得: $b(1-b)\leq\frac{1}{4}$, $c(1-c)\leq\frac{1}{4}$。将这三个不等式相乘便得所证不等式。

[例 2-93] (第 19 届奥地利试题)在区域$\{(x,y)|x,y>0, xy=1\}$中,求函数

$$f(x,y)=\frac{x+y}{[x][y]+[x]+[y]+1}$$

的值域,其中$[\alpha]$表示α的整数部分。

解:由对称性,不妨设$x\geq 1$

① 当$x=y=1$时,$f(1,1)=\frac{1}{2}$。

② 当$x>1$时,令$x=n+\alpha(n\geq 1, n\in N, 0<\alpha<1)$,则$y=\frac{1}{n+\alpha}$,$[y]=0$,$[x]=n$

$$f(x,y)=\frac{n+\alpha+1/(n+\alpha)}{n+1}$$

由于$x+\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$内是增函数,则

$$f(x,y)\in \frac{n+\frac{1}{n}}{n+1},\frac{n+1+\frac{1}{n+1}}{n+1}$$

记 $a_n=\frac{n+\frac{1}{n}}{n+1}$, $b_n=\frac{n+1+\frac{1}{n+1}}{n+1}$,则

$$a_n-a_{n+1}=\frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}<0$$

$$b_n-b_{n+1}=\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}>0$$

因此,当$n\geq 1$时,有

$$a_1>a_2=a_3<a_4<a_4<\cdots,\quad b_1>b_2>b_3>\cdots。$$

于是当$x>1$时,$f(x,y)$的值域为$[a_2,b_1)$,即$\frac{5}{6},\frac{5}{4}$。

综合①,②,$f(x,y)$的值域为$\frac{1}{2}\cup\frac{5}{6},\frac{5}{4}$。

由此例可见，分析对称性，有时是我们采用有序化方法或最优化方法的基础。读者还可从“有序化方法”一节中找到这样的例子，下面再看一例。

[例 2-94]　(第九届美国奥林匹克试题) 设 $1 \geq a; b, c \geq 0$，试证

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

证明：因原式为全对称式，可设 $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$，于是就有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1} \leq \frac{a+b+c}{a+b+1}$$

这样，要证原不等式，只要能证明

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \qquad (2\text{-}94\text{-}1)$$

便可。

(2-94-1) 等价于 $(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-c}{a+b+1}$。

于是只需证

$$(1-a)(1-b) \leq \frac{1}{a+b+1} \qquad (2\text{-}94\text{-}2)$$

由于 $(1-a)(1-b)(a+b+1) \leq (1-a)(1-b)(1+a)(1+b) \leq 1$，所以 (2-94-2) 成立，从而原不等式成立。

对于几何问题，充分利用图形的对称性，能帮助我们找到解题的捷径。

[例 2-95]　甲、乙两人轮流在一张方桌(或圆桌)上放硬币(硬币互不重叠)，直至放不下为止。规定放最后一枚的为胜，说明放第一枚硬币的甲有百战百胜的策略。

解：甲将第一枚硬币放在桌子中央（对称中心）。以后，每当乙放一枚硬币时，甲就在（关于中心）对称的地方放一枚硬币。这样，只要乙能放硬币，甲一定能放，所以甲必胜无疑。

[例 2-96]　(1984 年巴尔干试题) 证明：圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 全等于四边形 $H_1H_2H_3H_4$，其中 H_1, H_2, H_3, H_4 分别是 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_2A_4$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心。

证明：首先证明，线段 A_1H_1 的中点与 A_2H_2 的中点重合。为此，过点 A_3 作一条与 A_3A_4 垂直的直线，并且用 K 表示该直线与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接圆相交的不同于 A_3 的那个交点（如图 2.22）。

因为 $A_2H_1 \perp A_3A_4$，所以 $A_2H_1 /\!/ KA_3$。又因为 $A_3H_1 \perp A_2A_4$，且 KA_4 是直径，$\angle KA_2A_4 = 90°$，所以 $A_3H_1 /\!/ KA_2$。因此 $KA_2H_1A_3$ 是平行四边形，从而 $\overline{A_2H_1} = \overline{KA_3}$。

同理可证 $A_1H_2A_3K$ 也是平行四边形，因此 $\overline{A_1H_2} = \overline{KA_3}$。

图　2.22

于是 $\overline{A_2H_1} = \overline{A_1H_2}$，并且线段 A_1H_1 与 A_2H_2 是平行四边形 $A_1H_2H_1A_2$ 的对角线，且被它们的交点平分，同理可证，线段 A_2H_2 的中点与 A_3H_3 的中点重合，线段 A_3H_3 的中点与 A_4H_4 的中点重合。因此，四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 在关于上述四条线段的公共中点的中心对称变换下变为四边形 $H_1H_2H_3H_4$，故四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 全等于四边形 $H_1H_2H_3H_4$。

注：利用例 2-96 题的结论，极易推出 1992 年全国联赛试题"设 $A_1A_2A_3A_4$ 为

⊙O 的内接四边形，H_1, H_2, H_3, H_4 依次为$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心。求证：H_1, H_2, H_3, H_4 四点在同一个圆上"。事实上，四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 全等于四边形 $A_1A_2A_3A_4$，后者共圆，前者当然共圆。

利用对称方法证明几何不等式和求几何最值也是十分常见的，这将在本书第三章几何不等式一节中予以介绍。这里从略。

充分利用对称性，可巧妙地解答一些高难度的竞赛试题。

[例 2-97]　(第二届冬令营试题) 把边长为 1 的正三角形 ABC 的各边 n 等分，过各分点作平行于其它两边的直线，将这三角形分成小三角形。各小三角形的顶点都称为结点。在每一结点上放置了一个实数。已知

(Ⅰ) A, B, C 三点上放置的数分别是 a, b, c;

(Ⅱ) 在每个由公共边的两个最小三角形组成的菱形之中，两组相对顶点上放置的数之和相等。

试求：① 放置最大的数的点与放置最小数的点之间的最短距离。

② 所有结点上的数的总和 S。

(此题②的常规解法较复杂。上海选手潘子刚利用对称性，给出了②的一个简便而巧妙的证明(过程见下面解法)，因而获得了该届冬令营的特别奖。)

解：①由平面几何知识可知，所有的结点都在所作直线和$\triangle ABC$ 的边界上。如图 2.23，观察可知任意三个相邻的结点三角形可组成等腰梯形，不妨设其各结点放置的数为 x, y, u, v, w，我们先证：u, v, w 成等差数列。事实上，由(Ⅱ)知 $x+v=y+u$，$y+v=x+w$，两式相加得 $2v=u+w$。

由上面结论易推出，分别在所作直线及$\triangle ABC$ 边上的结

点上放置的数，各自依次成等差数列，因等差数列中的最大数及最小数必在其两端，故最大数及最小数必属于$\{a, b, c\}$。

(i) 若 $a = b = c$，则每一结点既是最大点又是最小点，故 $r = 0$。

图 2.23

(ii) 若 a, b, c 中只有两个相等，不妨设 $a = b < c$，则线段 AB 上的所有结点都是最小点，放置的数均是 a。当 n 为偶数时，AB 的中点恰好是结点，故 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$；当 n 为奇数时，AB 的中点不是结点，与中点相邻的两结点到 C 的距离最短，此时 $r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n}\right)^2} = \frac{1}{2n}\sqrt{3n^2 + 1}$。

(iii) 当 a, b, c 互不相等时，显然 $r = 1$。

② 把三个全等正三角形迭起来（如图 2.24），组成一个新的正三角形，它仍然满足（Ⅱ）。因为其顶点上所放置的数都是 $a + b + c$，所以各结点上放置的数也均为 $a + b + c$。因此，它的所有结点上数的总和为$\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)(a + b + c)$，从而 $S = \frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(a + b + c)$。

图 2.24

2. **引进对称性解题**

解题时可通过变量代换，取某些特殊值等方式，设法引进对称性，从而简单地解出问题。

[**例** 2-98] **求出满足**

$$\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}(x + 10°) \cdot \operatorname{tg}(x + 20°) \cdot \operatorname{tg}(x + 30°)$$

的全部 x **的值来。**

解：为了使等式的角度出现便于利用的对称性，令 $y = x + 15°$，**通过变量代换，原方程等价于**

$$\frac{\sin(y - 15°)\cos(y + 15°)}{\cos(y - 15°)\sin(y + 15°)} = \frac{\sin(y - 5°)\sin(y + 5°)}{\cos(y - 5°)\cos(y + 5°)}$$

对左右两边的分子分母运用积化和差公式易从上式化简得

$$\sin(4y) = \cos 10°$$

所以 $y = 45°k + (-1)^k \cdot 20°, k \in z$

即 $x = 5° + 90°k, 10° + 90°k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$。

[**例** 2-99] (**第四届冬令营试题**) f **是定义在**$(1, +\infty)$**上且在**$(1, +\infty)$**中取值的函数，满足条件：对任何** $x, y > 1$ **及** $u, v > 0$，**成立**

$$f(x^u y^v) \le f(x)^{\frac{1}{4u}} f(y)^{\frac{1}{4v}} \qquad (2\text{-}99\text{-}1)$$

试确定所有这样的函数 f。

题目的条件(2-99-1)**含有较多的任意参数，这对解题有利。关键在于适当地选择参数，以使不等式的两边呈现某种对称性。利用对称性就可从不等式导出等式来，从而为解出函数创造条件。**

解 1：**先对任意取定的** $x, y \in (1, +\infty)$ **和** $u \in (0, 1)$，**选择** v，**使得**

$$x^u y^v = x$$

由此解出 $v = (1-u)\dfrac{\ln x}{\ln y}$。

将这代入(2-99-1)式就得到

$$f(x) \leq f(x)^{\frac{1}{4u}} f(y)^{\frac{\ln y}{4(1-u)\ln x}}$$

即

$$f(x)^{\left(1-\frac{1}{4u}\right)\ln x} \leq f(y)^{\frac{\ln y}{4(1-u)}} \qquad (2\text{-}99\text{-}2)$$

再选择 u, 使得(2-99-2)式两边呈现对称性。为此, 应要求

$$1-\frac{1}{4u} = \frac{1}{4(1-u)}$$

由此解得 $u = \dfrac{1}{2}$。在(2-99-2)式中取 $u = \dfrac{1}{2}$, 我们得到

$$f(x)^{\ln x} \leq f(y)^{\ln y} \qquad (2\text{-}99\text{-}3)$$

由于对称性, (2-99-3)式应该是等式, 即对任意的 $x, y > 1$, 都有

$$f(x)^{\ln x} = f(y)^{\ln y}$$

即 $\qquad f(x)^{\ln x} = c \quad$ (大于 1 的常数)

所以

$$f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}, c > 1 \qquad (2\text{-}99\text{-}4)$$

这是函数 f 满足不等式(2-99-1)的必要条件。

下面验证当 $c > 1$ 时, 函数 $f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$ 确实满足题中的条件。对于 $x, y > 1, u, v > 0$, 由于

$$f(x^u y^v) = c^{\frac{1}{\ln x^u y^v}} = c^{\frac{1}{u\ln x + v\ln y}}$$

即要验证 $\quad c^{\frac{1}{u\ln x + v\ln y}} \leq c^{\frac{1}{4u\ln x}} \cdot c^{\frac{1}{4v\ln y}} = c^{\frac{1}{4u\ln x} + \frac{1}{4v\ln y}}$

由 $c > 1$, 上面的不等式等价于

$$\frac{1}{u\ln x+v\ln y}\leq\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}$$

稍作代数运算, 这个不等式等价于

$$4uv\ln x\ln y\leq(u\ln x+v\ln y)^2$$

但最后这个不等式是确实成立的。

由上所述, 满足题中条件的函数 $f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}$, 其中 c 是任何大于 1 的常数。

“对称化”的另一种解法是, 让 x, y, u, v 都取特定值, 使两边呈现某种对称性。

解 2: 在(2-99-1)中取 $x=y=a>1, u=v=\frac{1}{2}t>0$, 这样得到

$$f(a^t)\leq f(a)^{\frac{1}{t}} \qquad (2\text{-}99\text{-}5)$$

这式也隐含了一种对称性: 在(2-99-5)中以 $b=a^t$ 代替 a, 以 $s=\frac{1}{t}$ 代替 t, 就得到

$$f(a)=f(b^s)\leq f(b)^{\frac{1}{s}}=f(a^t)^t$$

即

$$f(a^t)\geq f(a)^{\frac{1}{t}} \qquad (2\text{-}99\text{-}6)$$

由(2-99-5)和(2-99-6), 我们得到

$$f(a^t)=f(a)^{\frac{1}{t}} \qquad (2\text{-}99\text{-}7)$$

只须命 $x=a^t$, 从(2-99-7)我们得到

$$f(x)=f(a)^{\frac{1}{\log_a x}}$$

我们看到, 满足题目条件的函数 f 必须具有这样的形式 $f(x)=c^{\frac{1}{\log_a x}}$, $c>1, a>1$

再同解法 1 验证 f 确满足不等式(2-99-1)便可。

[例 2-100]　已知 m 为实数, $x>0, y>0, x+y<\pi$ 求证: $m(m-1)\sin(x+y)+m(\sin x-\sin y)+\sin y>0$

证明: 由于条件中的 x, y 具有对称性, 令

$$A=m(m-1)\sin(x+y)+m(\sin x-\sin y)+\sin y$$

$$B=m(m-1)\sin(y+x)+m(\sin y-\sin x)+\sin x$$

由 x, y 的对称性, 因此若 $B>0$ 成立, 则 $A>0$ 必成立, 反之亦然。

这样欲证 $A>0$, 只需证 A, B 中至少有一个大于零, 亦只需证 $A+B>0$。下证 $A+B>0$ 成立

因 $x, y>0, x+y<\pi$ 所以

$$0<\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y<2(\sin x+\sin y)$$

于是　$A+B=2m^2\sin(x+y)-2m\sin(x+y)+(\sin x+\sin y)$

$=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\sin(x+y)+\frac{1}{2}[2(\sin x+\sin y)-\sin(x+y)]>0$, 得证。

上例通过对称分析, 达成了问题的转化。

3. 对称性诱发解题方向的猜想

对称性分析, 可诱发我们对解题方向作出某种猜想。特别对一些最优性问题, 对称分析法在解题过程中确可起到导向作用。

[例 2-101]　(第 32 届 IMO 试题) 设 P 为△ABC 内一点, 求证∠PAB, ∠PBC, ∠PCA 中至少有一个小于或等于 30°。

分析: 只须证明 $\sin(\angle PAB)\leq\frac{1}{2}$, $\sin(\angle PBC)\leq\frac{1}{2}$,

$\sin(\angle PAC)\leq\frac{1}{2}$中至少有一个成立。最优性和对称性的紧密相连性诱发我们一种非充足理由推理：如下具有对称性的式子，$\sin(\angle PAB)\cdot\sin(\angle PBC)\cdot\sin(\angle PCA)$与$\sin(\angle PAB)+\sin(\angle PBC)+\sin(\angle PCA)$只有在$\triangle ABC$是等边三角形且P是它的内心时达到最大值。即猜想通过证明下列两个不等式来达到目的：

$$\sin(\angle PAB)\cdot\sin(\angle PBC)\cdot\sin(\angle PCA)\leq\frac{1}{8} \quad (2\text{-}101\text{-}1)$$

$$\sin(\angle PAB)+\sin(\angle PBC)+\sin(\angle PCA)\leq\frac{3}{2} \quad (2\text{-}101\text{-}2)$$

下面从猜想(2-101-1)出发来证明本例

证明：如图2.25，令$\alpha=\angle PAB$，$\beta=\angle PBC$，$\gamma=\angle PCA$，于是

$PA\cdot\sin\alpha=PB\cdot\sin(B-\beta)$

$PB\cdot\sin\beta=PC\cdot\sin(C-\gamma)$，

$PC\cdot\sin\gamma=PA\cdot\sin(A-\alpha)$

图 2.25

从而 $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\sin(A-\alpha)\cdot\sin(B-\beta)\cdot\sin(C-\gamma)$。

由$\lg(\sin x)$在$(0,\pi)$内的凸性可知

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\\=&\sin\alpha\cdot\sin(A-\alpha)\cdot\sin\beta\cdot\sin(B-\beta)\cdot\sin\gamma\cdot\sin(C-\gamma)\\\leq&\sin^6\frac{\alpha+(A-\alpha)+\beta+(B-\beta)+\gamma+(C-\gamma)}{6}\\=&\sin^6 30=\frac{1}{64}。\end{aligned}$$

即 $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\geq\frac{1}{8}$。

由此可知 α, β, γ中存在一个例如 α满足 $\sin\alpha\leq\frac{1}{2}$。所以 $\alpha\leq 30°$或者 $\alpha\geq 150°$, 在后一种情况必有 β, γ都小于 30°, 得证。

由猜想(2-101-2)出发来证明本例, 思路应该是可行的, 但我们未找到猜想(2-101-2)的证明, 希望看到有读者能完成这一工作。

[例 2-102] (1991 年全国联赛试题) 设 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$, A 为至少含有两项的, 公差为正的等差数列, 其项都在 S 中, 且添加 S 的其它元素于 A 中均不能构成与 A 有相同公差的等差数列, 求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列)。

分析: 考虑满足条件的数列 A, 由于不能再增加项数, 这种"最大性"启示我们产生某种"对称性"联想: 实际上, 数列 A 是由"中间"两项唯一确定的。因此, 我们可以考虑将 S 划分为"对称"的两个子集。

解: 对于 $n=2k$, 所述数列 A 必有连续两项, 一项在$\{1, 2, \cdots, k\}$中, 另一在$\{k+1, k+2, \cdots, n\}$中。反之, 从$\{1, 2, \cdots, k\}$中任取一数, $\{k+1, k+2, \cdots, n\}$中任取一数, 以它们的差为公差作出一个 A。此对应是一一对应。故这种 A 的个数为 $k^2=\frac{n^2}{4}$。

对于 $n=2k+1$, 情况完全类似。注意集合$\{k+1, k+2, \cdots, n\}$中有 $k+1$ 个数, 故这种 A 的个数为 $k(k+1)=\frac{n^2-1}{4}$。

4. 注重对称性的潜在作用

[例 2-103] 试求一切不全为 0 的实数 x, y, z, w, 给出

代数式

$$\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$$

的一个上界,并希望这个上界是最小的。

分析:引入待定参数 $\alpha>0$,注意到 x,w 对称,y,z 对称,变形时应保持这种对称性。

$$xy+2yz+zw \le \frac{1}{2}\alpha x^2+\frac{1}{2\alpha}y^2+(y^2+z^2)+\frac{1}{2}\alpha w^2+\frac{1}{2\alpha}z^2=\frac{1}{2}\alpha x^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)y^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)z^2+\frac{1}{2}\alpha w^2$$

(2-103-1)

为了使上式右端作为分子能与原分母约掉,只须取 α 使

$$\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2\alpha}+1,\text{即 } \alpha^2-2\alpha-1=0$$

解得 $\alpha=1+\sqrt{2}>0$,代入(2-103-1)得

$$\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}\le\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \qquad (2\text{-}103\text{-}2)$$

进一步考虑(2-103-2)能否取等号。由 x,w 对称,y,z 对称来考虑特殊值的选取。当 $x=w=1$ 时,令 $y=z$,要(2-103-2)取等号,解得 $y=z=\sqrt{2}+1$。这说明当 $x=w=1$,$y=z=\sqrt{2}+1$ 时,(2-103-2)取等号。

因此 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ 是一个可以达到的最小上界。

[例 2-104] (第 16 届全俄数学竞赛试题)在半径为 2 的圆内能否放进 8 个不重叠的边长为 1 的正方形。

分析:作这样的思考,如果在任何对称的排列下不能放进去,那么在不对称的任何场合也不能放进去。不妨尝试一种对

称的放法。

解:将 8 个正方形排列如图 2.26。下证明等腰梯形 ABCD 的外接圆半径小于 2,以及点 E,F 在圆内。

记圆心为 O,K,L,M 依次为 AD,BC,EF 的中点,又设 OK $= x$,则 $LO = 3 - x$,这时

$$AO^2 = AK^2 + KO^2 = \frac{9}{4} + x^2$$

$$BO^2 = BL^2 + LO^2 = 1 + (3 - x)^2$$

由 $AO = BO$ 得 $\frac{9}{4} + x^2 = 1 + (3 - x)^2$ 解得 $x = \frac{31}{24}$,所以 $OA = \sqrt{\frac{9}{4} + \left(\frac{31}{24}\right)^2} < 2$,所以等腰梯形 ABCD 的外接圆半径小于 2。

图 2.26

又 $MO = 2 - x = \frac{17}{24} < \frac{31}{24} = OK$,$OE = \sqrt{MO^2 + \frac{9}{4}} < 2$,即 E,F 在圆 O 内。

上面的论证说明,按照图中的放法,半径为 2 的圆能放进 8 个不重叠的边长为 1 的正方形。

[例 2-105] (第 19 届 IMO 试题)在一个有限的实数数列中,任何 7 个连续项的和都是负数,任何 11 个连续项的和都是正数。试问这样一个数列最多能包含多少个项?

解:我们证明这个数列至多含 16 项。

首先,假定有一个 17 项的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{17}$ 具有所述的性质。不妨将它排成一个对称的数表:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}, a_{11}$$
$$a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{11}, a_{12}$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_7, a_8, a_9, \cdots, a_{16}, a_{17}$$

在这 7 行 11 列的表中, 由于每行的和都是正数, 所有数的和是正数。另一方面, 由于每列的和都是负数, 所有数的和是负数。矛盾!

其次, 我们来构造一个 16 项的数列满足要求。为简单起见, 我们设其中的正数都是 a, 负数都为 b。在连续 7 项中至少有一个 b, 实际上仅有一个 b 是不行的, 因为如果 $b + ba < 0$, 那么 11 项(其中将有 2 个 b) 之和就小于零。据此我们可以设想构造一个 7 项中有 2 个 b, 11 项中有 3 个 b 且形式对称的数列: a, a, b, a, a, a, b, a, a, b, a, a, a, b, a, a。

这里只须取 $5a + 2b < 0$, $8a + 3b > 0$, 特别地取 $a = 5$, $b = -13$。16 项的数列

5, 5, - 13, 5, 5, 5, - 13, 5, 5, - 13, 5, 5, 5, - 13, 5, 5 确实满足要求。

对称分析法在数学的研究中也起着广泛的作用。著名的理论物理学家杨振宁曾高度赞美对称分析法:“当我们默默考虑一下这中间所包含的数学推理的优美性和它美丽的完整性, 并以此对比它的复杂的、深入的物理成果, 我们就不能不深深感到对对称定律的力量的钦佩。”愿有兴趣的读者能从数学学习和研究的实践中体验对称分析法的奇妙作用。

习 题 2.9

1. 10 个人排成一排, 甲必须在乙的左边的排列有多少?

2. 已知半径为 R 的圆上的两点 A 和 B, AB 间的距离是 l, 试问: 当点 C 位于该圆上何处时, AC^2+BC^2 所能取的最大值是什么?

3. ① 连接正 $2n+1$ 边形的顶点可组成多少个等腰三角形?

② 连接正 $2n$ 边形的顶点可组成多少个斜三角形?

4. 设 x, y, z 是三个不全为零的实数, 求函数

$$f(x,y,z)=\frac{xy+2yz+2zx}{x^2+y^2+z^2}$$

的最大值。

5. ① 在 8×8 的普通棋盘上, 至多能放多少只象, 互不相吃(每只"象"可以吃掉与它在同一斜线上的棋子)?

② 每一种使互不相吃的象的个数达到最大的放法, 称为一个最大组。证明: 在 n 为偶数时, 最大组的个数是平方数。

2.10 极端情况分析法

在解数学竞赛题时, 问题中的某些"极端"的对象, 如"最大的","最小的","最长","最短"的量及图形的极限位置、临界位置等等, 往往是解决问题的出发点和突破口, 通过对它们进行分析和研究易使问题获得解决, 这种解题方法叫极端情况分析法。

由于"序"关系是数学中最重要的关系之一, 而极端情况分析法的本质是一种特殊形式的有序化方法, 因此, 作为探索问题的思考方式, 它在解题中有着广泛的应用。

用极端情况分析法解题, 关键在于确定研究哪些对象的哪些量的极端情形。有时, 从题设条件和结论的含义里可直接确定; 有时却要仔细分析比较合理选择; 还有的要构造新的数量集, 再考虑其极端情形。总之, 须因题而异, 具体分析。下面

举例说明极端情况分析法的应用。

1. **处理几何问题**

[例 2-106] **平面上任意 n 个不全共线的点中,总可以找到一条直线,它仅通过其中的两个点。**

注:例 2-106 是英国著名数学家 J. J. Sylvester 在其逝世前不久提出的一个有趣的几何问题。这个貌似简单的问题苦恼过不少著名数学家。1933 年,T. Gallai给出了一个证明,但它的证明非常复杂。后来,L. M. Kelly 利用极端情况分析法,给出了例 2-106 中所述的简洁的证明。

证明:过 n 点中任何两点的直线最多有 C_n^2 条,考察所有点到所有直线的距离(距离为 0 的除外),这些距离不全相同,而且最多有 nC_n^2 个,设其中最小的一个距离所对应的点和直线分别为 P, l,则 l 为所求的直线。实际上,若 l 上的点多于两个,设 P 到 l 的距离为 PA, A 为垂足(A 不一定是 n 个点中之一),则在 l 上 A 点的某侧(包括 A)至少有所给 n 个点中的两个点,设为 M, N(如图 2. 27),其中 M 更靠近 A(M 可能与 A 重合)。连 PN,且作 $MQ \perp PN$, $AR \perp PN$,显然有 $MQ \leq AR < AP$,这与 AP 是所有距离中最小的矛盾,从而命题获证。

图 2.27

[例 2-107] (1991 年亚太地区数学竞赛试题)若平面上有 997 个点,如果每两点连一条线段,且中点涂成红色,证明:平面上至少有 1991 个红点。你能找到一个正好是 1991 个红点的特例吗?

解: 在给定点中, 选取两点 M, N, 使得它们之间的距离最大。以 M, N 为圆心, $\frac{1}{2}MN$ 为半径分别作圆 C_M, C_N。

设 P 为余下的 995 个点中的任意一点, 则 $MP \leq MN$, 即 $\frac{1}{2}MP \leq \frac{1}{2}MN$。于是 MP 的中点一定在 C_M 圆内或圆上。同理, NP 的中点必在 C_N 圆内或圆上。故在 C_M, C_N 圆内或圆上分别至少有 995 个点, 再加上 MN 的中点, 有 $2\times 995+1=1991$ 个红点, 即平面上至少有 1991 个红点。

若点 $P_1, P_2, \cdots, P_{997}$ 共线, 且 $P_1P_2=P_2P_3=\cdots=P_{996}P_{997}$, 则对于 $P_{i-1}P_i$ $(i=2, \cdots, 997)$ 有 996 个中点, 而 P_i $(i=2, 3, \cdots, 996)$ 是 $P_{i-1}P_{i+1}$ 的中点, 故又有了另外 995 个红点, 于是在这种特殊情况下恰有 1991 个红点。

[例 2-108] 证明: 任意面积为 1 的凸多边形能够被面积为 2 的矩形覆盖。

证明: 设 AB 是多边形的最长对角线(或是最长的边)。过点 A 和 B 引直线 a 和 b, 与直线 AB 垂直。如果 X 是多边形的顶点, 则

$$AX \leq AB, XB \leq AB$$

因此多边形位于由直线 a 和直线 b 所构成的带形内部。作平行于 AB 的多边形的支撑线, 设这两直线过顶点 C 和 D, 并且与直线 a 和 b 构成矩形 $KLMN$(如图 2.28)。这时

图 2.28

$$S_{KLMN}=2S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}=2S_{\text{四边形}ACBD}$$

因为四边形 ACBD **包含在面积为** 1 **的多边形之内**, **所以** $S_{KLMN}\leq 2$, **得证。**

[**例** 2-109] (**第** 8 **届前苏联数学奥林匹克试题**) **已知凸多边形**, **在其内不能放置面积为** 1 **的任何三角形。证明**: **这个多边形能置于面积为** 4 **的三角形内。**

证明: **研究已知的多边形** P **的顶点集合**, **并且从中选出三点** A, B, C, **使三角形** ABC **的面积最大。显然**, **三角形** ABC **的面积不小于任何一个能置于多边形** P **内的三角形的面积。**

设 M **是多边形** P **的任意一点**, **因为三角形** MBC **的面积不大于** $S_{\triangle ABC}$, **所以**, M **位于以直线** BC **为对称轴**, **而宽度为由顶点** A **引出的**$\triangle ABC$**高的二倍的带形区域内。对**$\triangle MAB$**和**$\triangle MAC$ **做同样的研究**, **得知多边形所有的点属于三个带形交叉构成的平面区域——**$\triangle A'B'C'$(**如图** 2.29), **它的面积等于** $4S_{ABC}=4$。

[**例** 2-110] (**第** 48 **届莫斯科奥林匹克试题**) **证明**: **如果三角形的每条角平分线都大于** 1, **那么它的面积大于** $\frac{\sqrt{3}}{3}$。

证明: **设**$\angle A$ **为**$\triangle ABC$ **的最大角**, $AD>1$ **为**$\angle A$ **的平分线。**

过 D **引一切可与**$\angle A$ **的边相交的直线**, **并从中选出面积最小的三角形** AB_1C_1, **这是一个等腰三角形。事实上**, **如图** 2.30, **过** D **引直线** MN **分别于** AB_1, AC_1 **的延长线交于** M, N **两点**, **再作** $C_1L\parallel AB_1$ **交** MN **于** L, **则易证**$\triangle B_1MD$ **的面积**= $\triangle C_1DL$ **的面积**, **于是**$\triangle AB_1C_1$ **的面积**$\leq\triangle AMN$ **的面积。**

注意到 $A\geq 60°$, **于是等腰**$\triangle AB_1C_1$ **的面积等于** $AD^2\cdot$

图　2.29　　　　　　　　　　　　图　2.30

$\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} > 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$。故$\triangle ABC$的面积$\geq \triangle AB_1C_1$的面积$>$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$,得证。

[例 2-111]　(第 10 届 IMO 试题)证明:任何一个四面体中总有一个顶点,以这个顶点引出的三条棱为边可构成一个三角形。

证明:如图 2.31 考察长度最大的棱,设为 AB,则两顶点 A,B 中至少有一个顶点出发的三条棱可构成一个三角形。若不然,由 AB,AC,AD 不构成三角形且 AB 是最长棱知 $AC+AD \leq AB$,同理 $BC+BD \leq AB$,两式相加得

$2AB \geq AC+AD+BC+BD > AB+AB=2AB$,矛盾,从而结论成立。

[例 2-112]　(第 11 届 IMO 试题)平面上 $n(n>4)$个点,任何三点都不共线。试证:以这些点为顶点至少可以构成

C_{n-3}^{2}个凸四边形。

证明：n 个点中每三点为顶点作三角形，这些三角形只有有限个，设其面积最大的为△ABC，过 A，B，C 分别作其对边的平行线交成△A′B′C′(如图 2.32)。

因为△ABC 的面积最大，所以其余的 n-3 个点均在△A′B′C′中，过其中任意两点 D，E 的直线只能与△ABC 的两条边相交，不妨设

图 2.31

图 2.32

直线 DE 与边(线段)BC 不相交，则 B，C 在直线 DE 的同侧，D，E 在直线 BC 的同侧，从而四边形DEBC 为凸四边形。这说明：n-3 个点中任意两个点均可与△ABC 的某两个顶点构成一个凸四边形的四个顶点。因此，至少有 C_{n-3}^{2}个凸四边形。

以上例题说明，对于几何问题，通过分析其极端对象，如最大(或最小)的距离、面积、角度等，常常可发现和证明存在具有某种性质的对象，使问题顺利得以解决。

2. 处理数组和方阵问题

[例 2-113]　(1964 年前苏联基辅奥林匹克试题) 在 $n\times n$ 的正方形表格中写上非负整数。如果在某一行和某一列的交汇处的数是 0, 那么该行和该列上各数的和不小于 n。证明: 表中所有数之和不小于 $\frac{1}{2}n^2$。

证明: 从表中的各行各列中取出各数之和最小的行或列。不妨设取出的是某一行, 位于该行的各数之和是 k。

若 $k>n$, 则表中所有数之和 $S>kn>n^2>\frac{1}{2}n^2$, 结论成立。

若 $k<n$, 则这行就包含不少于 $n-k$ 个零。现在考察包含这些零的列, 依题意其中每一列的数之和不可能小于 $n-k$, 位于其它任何一列的数之和不小于 k, 所以表中各数之和为

$$S\geq(n-k)^2+k^2=\frac{n^2}{2}+2\left(k-\frac{n}{2}\right)^2\geq\frac{n^2}{2},$$ 得证。

[例 2-114]　(第 6 届前苏联奥林匹克试题) 三角形表按以下规则给出: 在上一横行写自然数 a, 在每个数 k 下面的左邻写上 k^2, 右邻写上 $k+1$。例如, 当 $a=2$ 时, 如图 2.33, 证明: 这表中每一横行的所有数各不相同。

图　2.33

证明: 假定从第 n 行开始出现相同的数, 并设 p, q 就是这一横行中相同的数。

因为在第 $n-1$ 行里没有相同的数，所以 p 和 q 是由这一行中的数 r 和 s 通过不同的方式得到的，设 $p=r^2, q=s+1$ 于是 $s=r^2-1$。

在从最上面的数 a 到数 s 的传递路线中，可能进行过"平方"或"加一"，而进行"平方"的最大数不大于 $r-1$(因为 $s=r^2-1$)。这表明，数 s 是在进行了最后一次"平方"后又至少进行了 $r^2-1-(r-1)^2=2r-2$ 步得到的，而且后面各步都是进行的"加一"。通过这种方式从 a 到 s 的步数不小于 $2r-1$，而 r 与 s 在同一横行里，又由 a 以同样步数得到的任意数都不小于 $a+2r-1>r$。于是得到 s 的方式不会有平方。这样 q 是第 n 行里最右边的数，也就是最小的数，这与等式 $p=q$ 矛盾。故结论成立。

[例 2-115]　(1975 年波兰竞赛试题) 已知实数列 $\{a_k\}(k=1, 2, \cdots)$ 具有下列性质：存在自然数 n，满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，及 $a_{n+k}=a_k(k=1, 2, \cdots)$。证明：存在自然数 N，使当 $k=0, 1, 2, \cdots$ 时满足不等式 $\sum_{i=N}^{N+k} a_i \geq 0$。

证明：设 $S_j=a_1+a_2+\cdots+a_j$，这里 $j=1, 2, \cdots, n$。按已知条件，序列 $\{a_k\}$ 的前 pn 项(p 是任意自然数)之和等于零，因此 $S_{j+n}=S_j(j=1, 2, \cdots)$。这表明数列 $\{S_n\}$ 的各项中只有有限个不同值。设 S_m 是 $S_1, S_2, \cdots$ 中的最小数，则 $m+1$ 便可作为要求的数 N，事实上，对任何 $k\geq 0$，

$$\sum_{i=m+1}^{m+1+k} a_i=\sum_{i=1}^{m+1+k} a_i-\sum_{i=1}^{m} a_i=S_{m+1+k}-S_m\geq 0$$

得证。

[例 2-116]　(第 26 届莫斯科奥林匹克试题) 在 8×8 方

格纸的每个格子里任意各填入 1, 2, …, 64 中的一个数, 证明: 存在两个邻格(指有公共边的格), 这两个格中数值差的绝对值不小于 5。

证明: 考虑极端数"1"和"64"所在的格。如果从"1"处一步步地走到"64"处, 每走一步, 就变成了另一个数, 即数值就有个改变量。设从"1"走向"64"时中间顺次经过的各数为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$。由于我们只考虑最经济的走法, 显见, 这种走法最多在一行中走七步, 再在一列中走七步, 即可从"1"走到"64"处, 即 $m \leq 13$。数值改变量依次为 $|a_1-1|, |a_2-a_1|, \cdots, |a_m-a_{m-1}|, |64-a_m|$。显然, 这样的数不超过 14。由于

$$|a_1-1|+|a_2-a_1|+\cdots+|a_m-a_{m-1}|+|64-a_m|$$
$$\geq (a_1-1)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_m-a_{m-1})+(64-a_m)=63$$

把每一个改变量 $|a_1-1|, |a_2-a_1|, \cdots, |a_m-a_{m-1}|, |64-a_m|$ 作为一个抽屉, 则抽屉个数不超过 14, 把 63 分配到不超过 14 个的抽屉的, 由抽屉原理知, 必存在一个 $|a_i-a_{i-1}|$, 其值不小于 5。

3. 处理实际问题

[例 2-117]　(第 3 届前苏联奥林匹克试题) 有 20 个队参加全国足球冠军决赛, 为了能在任何三个已经比赛过的队中都有两个队已相互比赛过, 至少要进行多少场比赛?

解: 设在任何三个队找到两个已经互相比赛过的队, 我们选出一个比赛场次最少的队 A, 它共比赛 k 场。已经与 A 比赛过的 k 个队中的每一个队和 A 队自己都进行了不少于 k 场比赛。在没有与 A 队比赛的 $19-k$ 个队中的每一个都与其余所有 $18-k$ 个队比赛过, 这样, 在他们中, 任意三个队互相

之间都进行过比赛。这样一来，所有比赛场次的两倍不少于

$$k(1+k)+(19-k)(18-k)=2(k-9)^2+180\geq 180。$$

因此，至少要进行 90 场比赛。

如把所有的队按 10 队一组分成两组，使每一组中的所有队之间都比赛过，而没有一个队与另一组的队比赛过，则只要比赛 90 场，就满足题中要求。

[例 2-118]　(第十八届美国数学奥林匹克试题) 某地区网球俱乐部的 20 名成员进行 14 场单打比赛，每人至少上场一次。求证：必有六场比赛，其 12 个参赛者各不相同。

证明：记参加第 j 场比赛的选手为 (a_j, b_j)，并记

$$S=\{(a_j, b_j) \mid j=1,2,\cdots,14\}。$$

设 M 为 S 的一个子集，如果 M 中所含选手对中出现的所有选手各不相同，则称 M 为 S 的一个"好"子集。显然，这样的"好"子集存在有限多个。设其中元素个数最多的一个为 M_0，它的元素个数为 r，于是本题归结为证明 $r\geq 6$。

用反证法。假设 $r\leq 5$，由于 M_0 是最大"好"子集，故在 M_0 中没出现过的 $20-2r$ 名选手之间互相没有比赛，否则与 M_0 的最大性矛盾。这意味着，这 $20-2r$ 名选手所参加的比赛一定是同前 $2r$ 名选手进行的。

由于已知每名选手至少参加一场比赛，所以除了 M_0 中的 r 场比赛之外，至少还要进行 $20-2r$ 场比赛，即总比赛场数至少为

$$r+20-2r=20-r\geq 15$$

与比赛总场次为 14 相矛盾。

于是 $r\geq 6$，即必有六场比赛的参赛者互不相同。

习　题　2. 10

1. 已知一个矩形被分割为有限个互不相同的正方形, 求证: 这些小正方形中必定有一个, 它的任何一边都不与原矩形的边重合。

2. 证明: 以凸四边形的边为直径所作的圆完全复盖这个四边形。

3. 有限多个圆覆盖着面积为 S 的区域, 证明可以从中找出一组没有公共点的圆, 它们所覆盖的区域的面积$\geq\frac{1}{9}S$。

4. 在某个星系的每一个星球上, 都有一位天文学家在观测最近的星球, 若每两个星球间的距离都不相等, 证明: 当星球个数为奇数时, 一定有一个星球任何人都看不到(第 6 届全俄竞赛试题)。

5. 平面上 n 个蓝点, n 个红点, 现将每两个异色的点连一条线段, 称这样的线段为"异色线段"。每个点连且只连一次, 共有 n 条异面线段。试证: 存在一种连法, 使 n 条异色线段互不相交。

2. 11　不变量分析法

在许多问题中, 经常遇到下列情况, 某系统自身的状态不断改变, 需要弄清楚它的最终状态。完全了解状态的变化过程, 一般来说是件复杂的事情, 但有时我们可发现和研究某个不变量(这个量能描述系统的状态并在全过程中保持不变), 利用这个不变量在系统的最终状态和初始状态的量值相同这一特点来解决这个问题。

对于竞赛题, 如能恰当地应用已有的不变量或巧妙地发现题中潜在的不变量, 往往能使问题迎刃而解。竞赛题中遇到的不变量主要有数值不变量, 奇偶性不变量, 同余不变量, 几何不变量, 恒等及不等关系不变量等等。

用不变量分析法解题的关键在于发现和寻求问题的不变量。下面介绍几种寻求不变量的方法。

1. 直接观察发现不变量

有的题中不变量是明显的,通过直接的观察和分析便可找到。

[例 2-119]　(第 22 届 IMO 试题)已知 P 为△ABC 内一点,D, E, F 分别为 P 到三边 BC, CA, AB 所引垂线的垂足,求使$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$为最小的所有点 P。

分析:观察图 2.34,易见不论 P 为何点,

$$BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF=2S$$

是个不变量,其中 S 为△ABC 的面积,于是由柯西不等式有

$$\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)(BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF)\geq(BC+CA+AB)^2=l^2$$

其中 l 为△ABC 的周长,故得

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\geq\frac{l^2}{2S}$$

图　2.34

注意上式右端为一定值且等号当且仅当 PD= PE= PF 时成立。因此,所求的最小点恰有一点,即为△ABC 的内心。

[例 2-120]　(第 31 届 IMO 预选题)圆形跑道上 n 个不同点处各有一辆汽车准备出发。每辆车都以匀速每小时跑一圈。听到信号后,它们各选一个方向立即出发。如果两辆车相

遇,则同时改变方向以原速前进,求证必有某一时刻,每一辆汽车都回到原出发点。

分析:(i)因为任何两辆汽车速度相同,所以同向运行的车不会发生超越现象,而当两辆汽车迎面相遇时,又各自改变方向行驶,所以 n 辆车的顺序永不改变(不变量)。

(ii) 若在两辆汽车迎面相遇时即行交换两辆车的号码,则相当于两辆车各自按原方向行驶而不受相遇的影响(不变量)。从而运行一小时后各自回到原来出发的位置,即经过一小时后原来的 n 个出发点处各有一辆汽车且车的方向与该点原来的汽车方向相同(不变量)。

运行一小时后,由(i)知所有汽车顺序不变,由(ii)知原来 n 个出发点处各仍有一辆汽车且方向相同。故这时与出发时相比,必为各辆汽车位置的一个"旋转"(当 n 点分布不均匀时,这个旋转不是刚性的),或具体地说,是汽车号码的一个轮换,即每个号码都增加 k, $0\leq k< n$,其中当 $i+k>n$ 时,应理解为 $i+k-n$。

显然,在运行 n 个小时后,每辆车都回到自己原来出发的位置。

[例 2-121] (第 19 届前苏联奥林匹克试题)任意将 1, 2, …, $2n$ 这些自然数分成两组,每组 n 个数。设第一组中的数依递增次序写出,为

$$a_1< a_2< \cdots < a_n$$

第二组中的数依递减次序写出为

$$b_1> b_2> \cdots > b_n$$

求证:$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|=n^2$

分析:先划一个两行的表格,上一行依次写着 1, 2, …, $2n$

这些自然数;下一行相应地标出取这些数值的符号 a_i, b_j。看表 2.1 所示的最简单的情形:

表 2.1

1	2	…	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	…	$2n$
b_n	b_{n-1}	…	b_2	b_1	a_1	a_2	…	a_n

对这情况显然有题设等式成立。

一般的情形,可以通过在表 2.1 中交换第二行中的某些 a_i 与 b_j 的位置来实现。但交换时应保持 a_i 之间的相对次序不变,也保持 b_j 之间的相对次序不变。只须证明:逐次交换某些 a_i 与 b_j 的位置不会改变以下和式的值

$$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$$

为此,只须考察 a_1 逐次与某些 b_j 交换位置的情形(其他情形类似)。交换 a_1 与 b_1 的位置显然不会改变 S 的值。再来看进一步交换的情形(表 2.2)。

表 2.2

1	…	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	…	$2n$	
b_n	…	b_3	a_1	b_2	b_1	a_2	…	a_n	

与表 2.1 中的情形相比较,在表 2.2 所示的情形中 $|a_1 - b_1|$ 增加了 1 而 $|a_2 - b_2|$ 减少了 1,所以 S 的值实际不会改变。这说明,每当我们将某个 a_i 与相邻的 b_j 交换位置时,S 的各项中就有一项增加 1,另一项减少 1,因而总和保持不变,这就证明了:对一切情形都有 $S = n^2$。

以上的分析,虽然文字较长,思路却非常朴素自然。请读者根据上面分析写出简洁的证明。

对于操作问题,只须分析每次操作的特点便容易发现其中的不变量。

[例 2-122]　在黑板上写上 1, 2, …, 2n; 其中 n 是奇数。只要黑板上还有二个或二个以上的数,擦去其中的任意两个数 a 和 b, 并写 $|a-b|$。证明:最后黑板上还剩下一个奇数。

分析:固定黑板上的其他数,只考虑对 a, b 操作一次,这时用 $|a-b|$ 代替了 a 和 b,因此黑板上数的总和减少了

$$(a+b)-|a-b|=2\min\{a, b\}$$

这是一个偶数。到了这里,我们自然考察黑板上所有数的总和 S 的奇偶性,显见这是一个不变量(因每次操作仅减少一个偶数)。由于开始时 S 是奇数,因此终止时 S 仍是一个奇数。

[例 2-123]　一个圆等分成 6 个扇形,依次填入数 1, 0, 1, 0, 0, 0。多次同时把相邻的两个数增加 1。按照这样的操作规则能使这个圆上的 6 个数相同吗?

分析:设在圆上的 6 个数是 $a_1, a_2, \cdots, a_6$, 由于每次同时把相邻的两个数增加 1, 它们之间的差是保持不变的, 因此

$$I=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$$

是一个不变量。开始时, $I=2$。但是对于要求的结果 $I=0$。所以这个结果不能达到。

上面例题中的不变量,通过分析不难直接由题意找到。但对于有些竞赛题,不变量是隐藏得很深的,需要用一些特殊的方法才能把它挖出来。下面介绍几种这样的方法。

2. 扰动法证明不变量

在某些求证不变量的问题中,含有较复杂的任意性条件,这时可将条件做微小的扰动而考察所导致的变化,证明变化本身是个不变量。

[例 2-124] 设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的每一个数都是 1 或 -1,且满足条件

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1=0$$

证明:n 能被 4 整除。

证明:把 $S=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$ 中的一个等于 -1 的 a_i 用 1 代换,则 S 增加了

$$2(a_{i-1}+a_{i+1})=\begin{cases}0 & \text{当 } a_{i-1}=-a_{i+1} \text{ 时}\\ 4 & \text{当 } a_{i-1}=a_{i+1}=1 \text{ 时}\\ -4 & \text{当 } a_{i-1}=a_{i+1}=-1 \text{ 时}\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$,且记 $a_0=a_n, a_{n+1}=a_1$。所以经过代换后 S 模 4 的同余性不变。

逐次把 S 中等于 -1 的 a_i 用 1 代换。开始时,$S\equiv 0(\mathrm{mod}4)$,则终止时也应有 $S=n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$。故 $4|n$。

注:用完全类似于例 2-124 的方法可解 1989 年全国联赛试题:"在 $n\times n(n\geq 4)$ 的方格表的每一小格内任意填入 $+1$ 或 -1。现将表内 n 个两两既不同行又不同列的方格中的数的连乘积称为一个基本项。试证上述数表内所有基本项之和必能被 4 整除。"(留给读者完成,这里证明从略)。

[例 2-125] 将线段 A_0A_n 用分点 $A_0<A_1<A_2<\cdots<A_{n-1}<A_n$ 分成 n 段。将 A_0 和 A_n 两点染成蓝色,其余的分点染上红色或蓝色。求证:端点染有不同颜色的小线段的条数必为偶数。

证明:设 $A_i(1\le i\le n-1)$是第一个红点。现将 A_i 改染蓝色并考察这一变动带来的变化。若 A_{i+1}为红点,则 A_i 的变色使线段 $A_{i-1}A_i$ 的两个端点由异色变为同色,同时使 A_iA_{i+1}的端点由同色变异色。可见,A_i 变色前后端点异色的线段条数不变。若点 A_{i+1}为蓝色,则线段 $A_{i-1}A_i$ 和 A_iA_{i+1}的端点均由异色变成同色,即端点异色的线段条数减少 2。所以,在这种变动之下,端点异色的线段数的奇偶性不变。

经有限次操作后,总可以使所有分点都变成蓝色。这时异色端点的线段数为零,故知原来的异色线段数必为偶数。

3. 从局部不变量到整体不变量

对于某些题目,要想一下子观察出不变量是不易做到的。这时,可以先从局部入手,发现局部的不变量,然后再以局部不变量为基础寻求整体不变量,使问题得以解决。

[例 2-126]　(1992 年冬令营试题)在平面上画出一个 9×9 的方格表,在每一小格中都任意填入+1 或-1。下面一种改变填入数字的方式称为一次变动:对任意一个小方格,凡与此小格有一条公共边的所有小方格(不包括此格本身)中的数作连乘积,于是每取一格,就算出一个数。在所有小格都取遍后,将原格中的数去掉,再将如此算出的数同时放入相应的小方格中。试问是否总可以经过有限次变动,使得所有小方格中的数都变为 1?

解 1:容易验证,下列三个 4×4 的数表在所论变动下都是不变的,其中没写数的方格中都填+1,如图 2.35 所示。

将 9×9 方格表的中间一行和中间一列的所有方格都填入'+1,然后在余下的四个 4×4 的方格表中对称地填入上面

图 2.35

三个数表中的一个，即得在规定变动下不变的 9× 9 数表。例如，填入上面中间一数表的 9× 9 的不变数即如图 2.36 所示。

由此可见，此题的答案是否定的。

显然，这是由局部不变量拼凑成整体不变量的典型例子。解 1 中给出的 3 种解法，都需要以 4 × 4 的不变数表为基础，在此基础上才易构造出 9× 9 的不变数表。

图 2.36

解 2：将 9× 9 方格表的第一行填入 9 个数为(- 1，+ 1，- 1，+ 1，- 1，+ 1，- 1，+ 1，- 1)，其他方格中全填入+ 1，则当变动时，第 2，4，6，8 列中的数永远全是+ 1，而如果某行有- 1，则该行的数便与开始时第一行一样。这就是说，含有- 1 的行不论变到哪几行，每一行都与开始时第一行数一样。这可认为是个局部不变量。下面只须再考虑行的变化规律就行了，特别是只考虑有- 1 的行的变化规律就行了。这时我们有

1→2→1，3→4→3，5→2，6→1，3，5，7→8，→7，9→6→5，7

$\to 4, 8 \to 3, 5, 7, 9 \to 2$。

可见，第一次操作后的数表与第 13 次操作后的一样，即我们得到了一个周期为 12 的不变量，这种情形下数表中都有 -1 存在，所以，此题的答案是否定的。

[例 2-127]　(首届冬令营试题) 能否将两个 1，两个 2，…，两个 1986 排成一列，使得对每个 i，两个 i 之间都恰好夹着 i 个数? 说明理由。

我们曾在第二章 2.1 节中给出过本例的一种解法，这里用不变量分析法给出较简便的一种解法。

解：被夹的元素总数是由两对数的相互位置决定的。两个数 i 与两个 j 的相互位置只有下列三种

(i)　i, j, i, j　或 j, i, j, i;

(ii)　i, j, j, i　或 j, i, i, j;

(iii)　i, i, j, j　或 j, j, i, i。

显然，前两种情形有两个被夹元素，而在第三种情形下没有被夹元素。三种情形下，被夹的元素数都是偶数(局部不变量)，从而被夹元素总数必为偶数(不变量)。但若存在满足要求的排列，则被夹元素总数为

$$1 + 2 + \cdots + 1986 = \frac{1}{2} \times 1987 \times 1986 = 1987 \times 993$$

这是一个奇数，可见，所要求的排列是不能实现的。

4. 借助分类建立不变量

通过分类或分组，题中的不变量便容易显现出来。

[例 2-128]　(第 30 届 IMO 预选题) 一个 $m \times n$ 的长方形表中填写了自然数。可以将相邻方格中的两个数同时加上

一个整数,使所得的数为非负整数(有一条公共边的两个方格称为相邻的)。试问经过有限多次这种运算后,表中各数为0的充分必要条件是什么?

解:用染色方法进行分类。将 $m\times n$ 的表中相邻的方格染上黑白两种颜色。所有白格中数的和记为 $S_{白}$,所有黑格中数的和记为 $S_{黑}$。令 $S=S_{白}-S_{黑}$。由于每次运算 S 均保持不变,所以 $S=0$ 是经过若干次运算后,表中各数为0的必要条件。

现在证明 $S=0$ 也是充分条件。从表中的第一列开始,设第一列第一行的数为 a,第一列第二行的数为 b,第一列第三行的数为 c。

如果 $a>b$,将 b, c 同时加上 $a-b$,然后再将 a 与 $b+(a-b)=a$ 同时加上 $-a$。

如果 $a\leq b$,将 a, b 同时加上 $-a$。

这样进行下去,直至表成为

0	
0	
⋮	
0	r
g	h

或

0	
⋮	
0	r
g	h
0	

如果 $g\leq h$,则将 g 与 h 同时加上 $-g$。如果 $g>h$,则将 r, h 同时加上 $g-h$,然后将 g 与 $h+(g-h)$ 同时加上 $-g$。总之,我们可以使第一列的数全变为0。如此继续下去,可以使表中只有第 n 列的一个数可能非零,其余各数都变成0。由于 $S=0$,所以这时每一个数都是零。

[例 2-129]　(第 25 届前苏联奥林匹克试题) 在 5×5 方格表的一个方格中填写“ - ”号, 在其余方格中均写上“ + ”号。每次允许从表中任选一个 $k\times k(2\leq k\leq 5)$ 的方格表并将其中所有方格都改变符号。试问开始时应当将“ - ”号填在哪一个方格内, 才能使得有可能经过若干次上述变号后, 表中所有方格中的符号都是“ + ”号。

解: 我们把图 2. 37 中写有字母 A 的所有方格称为 A 组。显然, 任何一个 $k\times k(2\leq k\leq 5)$ 的正方形都恰含偶数个 A 组方格。因此, 如果开始时的唯一负号在某个 A 格, 那么在每步变号之后, 写有“ - ”号的 A 组方格总有奇数个(不变量), 当然不可能全是“ + ”号。

图　2. 37

将上图所示的图表分别旋转 90°, 180°, 270°, 不难看出, 只要开始时的负号不在中心方格内, 就不可能经若干次变号而变为全是正号。

当开始时的负号位于中心方格内时, 只要经过如下的五次变号, 即可变为全是正号: 先取左下方的 3×3 正方形, 再取右上方的 3×3 的正方形, 然后分别取余下的两个 2×2 的正方形, 最后取整个 5×5 正方形。

上例通过分组, 起决定性的不变量就显露出来了。

5. 借助数学模型建立不变量

在解较复杂的数学竞赛题时, 也可以给它建立适当的数

学模型，通过观察模型的变化而找出不变量，从而使问题顺利得到解决。

[例 2-130] (1984 年原列宁格勒竞赛题) 数列 1, 0, 1, 0, 1, 0, …自第七项起，每个数字都等于它前六项数字之和的个位数字。求证：在数列中不会出现连续六项为 0, 1, 0, 1, 0, 1。

证明：用 $L(n)$ 表示正整数 n 的末位数字。考虑函数

$$f(a_i)=L(2a_i+4a_{i+1}+6a_{i+2}+8a_{i+3}+10a_{i+4}+12a_{i+5})$$

$$\begin{aligned}f(a_i)&=L(2(a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+5})+2a_{i+1}+4a_{i+2}+6a_{i+3}\\&\quad+8a_{i+4}+10a_{i+5})\\&=L(2a_{i+6}+2a_{i+1}+4a_{i+2}+6a_{i+3}+8a_{i+4}+10a_{i+5})\\&=L(2a_{i+1}+4a_{i+2}+6a_{i+3}+8a_{i+4}+10a_{i+5}+12a_{i+6})\\&=f(a_{i+1})\end{aligned}$$

所以 $f(a_i)$ 为定值(不变量)，其值为

$$f(a_i)=f(a_1)=L(2+6+10)=8,\ i=1,2,\cdots。$$

若命题不真，即有正整数 $j>1$，使得

$$a_j=a_{j+2}=a_{j+4}=0,\ a_{j+1}=a_{j+3}=a_{j+5}=1,$$

则有 $f(a_j)=L(4+8+12)=4$，矛盾。所以数列中不能出现连续六项为 0, 1, 0, 1, 0, 1。

习　题　2. 11

1. 在黑板上记上数 1, 2, 3, …, 1974，允许擦去任意两个数，且写上它们的和或差。重复这样的操作手续直至黑板上仅留下一个数为止，求证：这个数不可能是零。(1974 年，前苏联基辅数学竞赛试题)

2. 在正方形的顶点处放上火柴。开始在某个顶点处放一根火柴，其他三个顶点空着。允许从某个顶点移走任意根火柴，然后在它的一切

相邻顶点处放火柴，其根数等于移动次数的两倍，是否可以经过若干次这样的操作，使各顶点的火柴根数(顺时针或逆时针方向)为 1989?(1989 年匈牙利竞赛试题)

3. 在一个圆周上以任意顺序填写四个 1 和五个 0。每一步在两个相邻的数之间填上 1 或者 0：如果相邻的两个数是相同的，则在它们之间填上 1；否则，填上 0；然后把原先的数全部擦掉。证明：如此继续下去，决不会得到 9 个 1。(1975 年前南斯拉夫竞赛试题)

4. 去掉角上一个方格的 8×8 正方形纸片，能否用 21 个 3×1 的矩形完全覆盖？剪掉哪一个方格可以完全覆盖。

5. 给出凸 $2m$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2m}$，在它内部取点 P，该点不属于任一条对角线，证明：点 P 属于以点 $A_1,\cdots,A_m$ 为顶点的三角形中的三个。

2.12 逐次逼近法

数学解题过程中，我们常常要从与问题实质有联系的较宽条件和较低要求开始，然后利用此时获得的结果作为新的行动基地，再逐步加强要求，加深层次，逼近原问题，最终获得彻底解决。这种解题方法叫做逐次逼近法。

逐次逼近法处理问题有合理分散、逐层突破难点的效果，因此它有重要的应用价值。

1. 局部调整逼近

对一些多变元问题，有时可先假定某些变元是已知的变量，在此条件下，求出问题的局部解，然后回过来调整以前暂时固定的变元，得到问题的整体解。这种由局部解，通过调整“逼近”整体解的方法常称为局部调整法。在解决多元极值时十分常用。

[例 2-131] (第 21 届 IMO 试题) 已知平面 π, π上一点 P 及 π外一点 Q, 在 π上求出点 R, 使$\frac{QP+PR}{QR}$为最大。

解: 如图 2.38, 设 R 点即为所求。记$\angle QPR=\alpha$, $\angle PQR=\beta$, $\angle QRP=\gamma$, 则由正弦定理, 得

$$PR=PQ\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},\quad QR=PQ\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

所以 $$\frac{QP+PR}{QR}=\frac{QP+QP\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}}{QP\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}}$$

$$=\frac{\sin\gamma+\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}。$$

先假定 α为定值, 显然当 $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=1$, 也就是 $\beta=\gamma$, $PR=PQ$ 时, $\frac{QP+PR}{QR}$取得最大值, 最大值为$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$(局部最大值)。

由于 $\sin\frac{\alpha}{2}(0<\alpha<\pi)$随着 α的增大而增大, 因此, 当 α

图 2.38

最小时,$\dfrac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$最大。显然当 PR 为 PQ 的射影时 α最小,因此,在 PQ 的射影上取一点 R,使 PR = PQ,则 R 就是使 $\dfrac{QR+PR}{QR}$为最大的点。

注:例 2-131 题也可以先固定 PR 之长,然后考虑 α取什么值时,所求的比值最大。

[例 2-132] (1982 年全国高中联赛试题)已知边长为 4 的正△ABC,D,E,F 分别是 BC,CA,AB 上的点,且$|AE| = |BF| = |CD| = 1$,连结 AD,BE,CF 交成△QRS,P 点在△QRS 内及其边上移动,P 到△ABC 三边的距离记为 x,y,z,求证当点在△QRS 的顶点位置时,积 xyz 有极小值。

证明:设 P 为正△ABC 内或边上任意一点,因 P 到各边距离之和 $x+y+z$ 为定值,可考虑过 P 作直线平行于 BC,交 AB,BE,AD,AC 于 U,V,M,N,如图 2.39。当 P 点在 UN 上移动时,积 xyz 中 x 固定不变,而 $yz = PU\cdot PN\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{3}$,故 yz 与 $PU\cdot PN$ 有一样的变化。由于 $4PU\cdot PN = (PU+PN)^2-(PU-PN)^2$,$PU+PN$ 为定值。故$|PU-PN|$逐渐增大,则 $PU\cdot PN$ 逐渐减少,当 P 与 G(BC 边上的高 AH 与 UN 的交点)重合时,$PU\cdot PN$ 有极大值,而 P 离开 G 点向两侧移动时,$PU\cdot PN$ 逐渐减少,这样,我们为使 xyz 有极小值,首先应将 P 点调整到 V,M 处,即△RQS 的边界上。

问题在于 BE 并不平行于 AB,AD,也不平行于 AC,直接在△RQS 的边界上继续上述调整,从 V、M 调整到 Q,S,R 处是荒谬的,因为重复上述调整的条件并不具备,但是,我们可通过如下的交换:

图 2.39　　　　　　图 2.40

过 R, Q, S 作 $RR'\parallel SQ'\parallel BC$, $QR'\parallel SS'\parallel AC$, $QQ'\parallel RS'\parallel AB$, 围成六边形 $QQ'SS'RR'$, 如图 2.40, 这样, 我们可重复上述调整, 将 P 点调整至 P'和 P''点, 再继续至 Q(或 Q')或 S(或 S')处, 由于对称, xyz 在 Q, Q', S, S' 处的值相同。同样 xyz 在 R, R' 处的值与在 Q 处的值相同, 故 xyz 在 Q, S, R 处达到最小值。

[例 2-133]　(第 14 届美国竞赛试题) 设 A, B, C, D 为空间四点, 边 AB, AC, AD, BC, CD 中至多有一条边长大于 1, 试求六边长之和的极大值。

解: 如图 2.41, 假设 AD 的边长可能大于 1。

容易看出, 若其它五条边长固定, 当 A, D 为平面四边形 $ABCD$ 的相对顶点时, AD 取极大值。

固定 B 和 C 的位置, 则 A 和 D 必须在以 B 和 C 为圆心的两个单位圆的公共区域内, 这个区域是中心对称的, 因而区域中的最长弦必定经过 BC 的中点 O, 这就是说, 区域中的最长弦重合于两个单位圆的公共弦, 若 A, D 为公共弦的两个端

点，则五边 AD, AB, AC, DB, DC 边长之和取得极大值，这时 $AB = AC = DB = DC = 1$。

这样问题就转化为：当 AB, AC, DB, DC 为 1 时，求 $AD + BC$ 的极大值。

记 $\angle ABO = \theta$，当 $0 < BC \leq 1$ 时，有 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$。

图 2.41

因为 $AD = 2\sin\theta$，$BC = 2\cos\theta$，所以

$$AD + BC = 2(\sin\theta + \cos\theta) = 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

由于 $\frac{7\pi}{12} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$，而 $y = \sin x$ 在 $\left[\frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上为减函数，于是当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时，$AD + BC$ 取得极大值，此时 $BC = 1$，$AD = \sqrt{3}$。

所以六边长之和的极大值为 $5 + \sqrt{3}$。

用局部调整法处理离散型的极值问题才是十分有效的。

[例 2-134]　(第 20 届 IMO 试题) 求和为 1976 的正整数之积的最大值。

解：因为将 1976 表示成正整数之和的表示式只有有限个，所以对应的乘积也只有有限个，因而其中必有最大者。

设正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足条件

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1976 \qquad (2\text{-}134\text{-}1)$$

并且乘积 $P = x_1 x_2 \cdots x_n$ 最大。这时，$x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 必有下

列性质:

(i) $x_i \leq 4 (i = 1, 2, \cdots, n)$

不然的话,例如,设 $x_1 > 4$,则可将 x_1 拆成 $x_1 - 2$ 与 2 之和,仍有

$$(x_1 - 2) + 2 + x_2 + \cdots + x_n = 1976$$

但是由 $(x_1 - 2) \cdot 2 = 2x_1 - 4 = x_1 + (x_1 - 4) > x_1$ 可知

$$(x_1 - 2) \cdot 2 \cdot x_2 \cdots x_n > x_1 x_2 \cdots x_n = P$$

此与 P 最大积矛盾。

(ii) $x_i \neq 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$。

否则,设 $x_1 = 1$,则有

$$(1 + x_2) + x_3 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1976$$

但是 $(1 + x_2) x_3 \cdots x_n > x_1 x_2 \cdots x_n = P$

此与 P 是最大积矛盾。

(iii) 若 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 中有等于 4 的,这时可用 2+ 2 代替而不改变乘积 $P = x_1 x_2 \cdots x_n$ 之值。

由性质(i)～(iii)即可推得,最大积 P 应具有形式

$$P = 2^r 3^s \quad (2\text{-}134\text{-}2)$$

在(2-134-2)中,必有 $r < 3$。否则,若 $r \geq 3$,则由 $2 + 2 + 2 = 3 + 3$,进行调整得

$$\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{r个} + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{s个}$$

$$= \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{r-3个} + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{(s+2)个} = 1976$$

但是由 $3^3 > 2^3$ 可得

$$P = 2^r \cdot 3^s = 2^3 \cdot 2^{r-3} \cdot 3^s < 3^2 \cdot 2^{r-3} \cdot 3^s = 2^{r-3} \cdot 3^{s+2}$$

这与 P 为最大积矛盾。由此可见, r 只能取 0, 1, 2,即因子 2 的个数只能是 0, 1, 2。由于因子 2 的个数是 0, 1, 2 时,这些因子

的总和被 3 除的余数是 0, 2, 1, 1976 被 3 除的余数是 2, 所以必定只有一个因子 2, 故最大值为 2×3^{68}。

注: 例 2-134 可推广到一般的情形, 将自然数 N 分拆成若干个自然数之和, 其乘积的最大值是: 3^k(当 $N=3k$ 时); $2^2\times 3^{k-1}$(当 $N=3k+1$ 时); 2×3^k(当 $N=3k+2$ 时)。

[例 2-135] (第四届冬令营试题) 空间中有 1989 个点, 其中任何三点不共线。把它们分成点数各不相同的 30 组, 在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形。问: 要使这种三角形的总数最大, 各组的点数为多少?

分析: 我们按照题目所述, 将 1989 个点分成 30 组。设各组的点数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$。这些数目互不相等, 不妨设

(i) $n_1 < n_2 < \cdots < n_{30}$。

又由题设即有

(ii) $n_1 + n_2 + \cdots + n_{30} = 1989$。

在任何三个不同的组中各取一点作三角形, 所作的三角形总数为

$$N = \sum_{1\le i<j<k\le 30} n_i n_j n_k$$

我们应该在条件(i)和(ii)的约束下去求 N 的最大值。运用调整法, 可以断定实现优化的安排必须满足以下两个条件:

(a) 相继的任意两组, 点数至多相差 2, 即 $1\le n_{i+1}-n_i\le 2$, $i=1, 2, \cdots, 29$;

(b) 将各组的点数象(i)中那样排成一行, 至多只有其中一处相邻两数的"间隙"为 2, 其他的"间隙"都只能是 1。这就是说, 在 29 个差数 $n_{i+1}-n_i$ 中, 至多只有一个能达到 2, 其余的都只能是 1。

为了证明以上论断(a)和(b), 我们来考察点数为 n 和 n″

的两组。三角形的总数 N 可以表示为:

$$N=\sum_{1\le i<j<k\le 30} n_i n_j n_k = n'n''\sum_i^{*} n_i + (n'+n'')\sum_{j,k}^{*} n_j n_k + \sum_{i,j,k}^{*} n_i n_j n_k。$$

表示式中带有"*"号的求和号都表示"除去含 n' 与 n'' 的项之后,对剩下的项求和"。

假设 $n''-n'\ge 2$,如果我们保持两个数 n' 与 n'' 之和不变,而将这两数分别调整为 $n'+1$ 与 $n''-1$,那么 N 就改变为

$$N=(n'+1)(n''-1)\sum_i^{*} n_i + (n'+n'')\sum_{i,j,k}^{*} n_j n_k + \sum_{i,j,k}^{*} n_i n_j n_k。$$

容易看出

$$(n'+1)(n''-1)=n'n''+(n''-n'-1)$$

如果 $n''-n'\ge 2$,那么,调整之后仍能保持各组点数的顺序关系:

$$n'+1<n''-1。$$

但调整后的三角形总数 N 肯定大于原来的总数 N。因为题目中的点数是有限的,所以分成 30 组的分组办法也仅有有限多种。在这有限多种分组法中,必定有一种(或数种)分组法能够使得三角形的总数 N 达到最大值。我们指出,对这样的分组法(使三角形总数 N 达到最大的分组法),必有前面陈述的结论(a)和(b)成立。这是因为:假如(a)不成立,即假设有相邻的两组,它们的点数 n_j 与 n_{j+1} 相差大于 2,那么我们就可以取

$$n'=n_j,\ n''=n_{j+1}$$

然后按照上面所说的办法进行调整,从而使三角形的总数增大;假定(b)不成立,例如 n_j 与 n_{j+1} 之间的"间隙"和 n_k 与 n_{k+1} 之间的"间隙"都是 2,那么,我们可以取 n_j 与 n_{k+1} 分别作为 n'

与 n''然后进行上面所说的调整，调整后的各组点数仍保持顺序：$n_j+1<n_{j+1}$，$n_k<n_{k+1}-1$，
但三角形的总数也增大了。

综上所述，使得三角形的总数达到最大的分组法，必定使得前面的论断(a)和(b)成立。我们可以设：相继各组的点数当中，唯一的一处相差为 2 的间隙出现在 n_{30-r} 与 n_{30-r+1} 之间。于是，以下这些数

$$n_1, \cdots, n_{30-r}, (n_{30-r+1}-1), \cdots, n_{30}$$

组成一个首项为 $q=n_1$，公差为 1 的等差数列

$$q, q+1, \cdots, q+29$$

这等差数列的和应为 $30q+\dfrac{29\times 30}{2}=1989-r$

我们得到 $$30q+r=1554$$

于是，只须作一个带余除法，将 1554 除以 30，求得 $n_1=q=51$，$r=24$

于是得知，使三角形总数最大的分组法应为

$$51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, \cdots, 80, 81。$$

上面的分析篇幅较大，但思路自然流畅。请读者根据此分析写一个较简明的解法。

2. 构造式调整逼近

所谓构造式调整逼近法，即是将要求的对象先构造出来，使之满足部分条件，再根据另外的条件逐步进行调整，直至找到完全满足题设条件的数学对象为止。

[例 2-136]　(第一届浙江省高师院校联赛题) 证明平面上任意 $n(n\geq 2)$ 个点，总可以被某些不相交的圆盖住，这些圆

的直径的和大于 $n-a+1$, 且每两个圆之间的距离大于 a, 这里 $0<a<1$。

证明: 首先以给定的 n 点为圆心, $r=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$为半径, 作 n 个圆。这 n 个圆的直径和为 $n\cdot 2r=n+1$。

作第一次调整: 使盖住 n 个点的各圆不相交, 且直径之和不增加。方法是: 对每两个相交的半径为 R_1 与 R_2 的圆, 用一个半径不大于 R_1+R_2 且能包含这两圆的新圆来代替(显然这是容易办到的)。在有相交圆的情况下, 将一直这样做下去, 直到各个圆都不相交为止。设这时共有 $k(n\geq k\geq 1)$ 个互不相交的圆, 盖住 n 个点, 不管是原来的单个圆, 还是因相交合并起来的圆, 所有原给定点距离这 k 个圆的边界都不小于 r。

再作第二次调整: 适当减小这 k 个圆的半径, 使能满足全部题设条件。因为这 k 个圆的半径均可分别减小 $b<r$, 且还能盖住 n 个给定的点。这时, k 个圆的直径之和不超过:

$$n\cdot 2r-k\cdot 2b\leq 2nr-2b$$

待定参数 b 可由条件 $b<r$, $2nr-2b<n-a+1$, $2b>a$ 来确定。

取 $r=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$, $b=\frac{a}{2}+\frac{1}{4n}<r$ 即可。

3. 磨光式逐次逼近

“磨光”就是消灭问题状态间的差异, 使之逐步达到平衡和均匀的状态。它的通常作法是: 根据磨光目标, 构造差异较小的新数组, 从而逐次逼近目标。

[例 2-137]　设 A, B, C 是三角形的三内角, 求证: sinA

$+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

这是一个较简单的不等式，可用多种方法证明。但用磨光式逐次逼近法来证明是颇为有趣的。

分析：当 $A=B=C=60°$ **时，不等式取等号，于是明确了"磨光"的目标。不妨设** A, B, C **不全相等，且设** $A\geq B\geq C$，**则** $A>60°>C$。**令** $A_1=60°, B_1=B, C_1=A+C-60°$，**则** $A_1+B_1+C_1=180°$，**且** $0°<A_1, B_1, C_1<180°$。**这时** $\sin A_1+\sin C_1=\sin 60°+\sin(A+C-60°)=\frac{1}{2}\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C-120°}{2}>\frac{1}{2}\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-C)=\sin A+\sin C$

即

$$\sin A+\sin B+\sin C<\sin A_1+\sin B_1+\sin C_1 \qquad (2\text{-}137\text{-}1)$$

如果 A_1, B_1, C_1 **仍不全相等，不妨设** $B_1>60°>C_1$，**再令** $A_2=A_1=60°, B_2=60°, C_2=B_1+C_1-60°=60°$，**则** $A_2+B_2+C_2=180°, 0°<A_2, B_2, C_2<180°$，**且**

$$\sin B_1+\sin C_1=\sin B+\sin(A+C-60°)$$

$$=2\sin 60°\cos\frac{1}{2}(A+C-B-60°)$$

$$<2\sin 60°=\sin A_2+\sin B_2$$

所以

$$\sin A_1+\sin B_1+\sin C_1<\sin A_2+\sin B_2+\sin C_2=\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (2\text{-}137\text{-}2)$$

这样经过两次磨光，三个角都变成了 $60°$，**故由**(2-137-1)

和(2-137-2)知题设不等式成立。

[例 2-138]　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正数, G 为这 n 个正数的几何平均值, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为任意实数, 求证

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_i^{\lambda_j}\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{m} G^{\lambda_j}\right)^n \qquad (2\text{-}138\text{-}1)$$

等式当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$ 或 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立。

证明: 不妨设 λ_j 不全相等, a_i 不全等, a_1 最小而 a_2 最大, 则 $a_1 < G < a_2$, 构造数组 $b_1 = G$, $b_2 = \frac{a_1 a_2}{G}$, $b_3 = a_3, \cdots, b_n = a_n$, 则

$$\sum_{j=1}^{m} a_1^{\lambda_j} \sum_{j=1}^{m} a_2^{\lambda_j} - \sum_{j=1}^{m} b_1^{\lambda_j} \sum_{j=1}^{m} b_2^{\lambda_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_1^{\lambda_j} \sum_{j=1}^{m} a_2^{\lambda_j} - \sum_{j=1}^{m} G^{\lambda_j} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{a_1 a_2}{G}\right)^{\lambda_j}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,t=1}^{m}\left(\frac{a_1^{\lambda_k}}{G^{\lambda_k}} - \frac{a_1^{\lambda_t}}{G^{\lambda_t}}\right) \cdot \left(G^{\lambda_k} a_2^{\lambda_t} - G^{\lambda_t} a_2^{\lambda_k}\right) \geq 0$$

这样, 有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_i^{\lambda_j}\right) \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_i^{\lambda_j}\right)。$$

如果诸 b_i 不全相等, 则如法构造数组 $c_1, \cdots, c_n$(使 $c_1 = b_1$, 其它按上法构造), 每构造一个数组, 至少增加一个变元取 G。于是通过有限次便可全换成 G。所以有不等式串:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_i^{\lambda_j}\right) \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_i^{\lambda_j}\right) \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_i^{\lambda_j}\right)$$

$$\geq \cdots \geq \left(\sum_{j=1}^{m} G^{\lambda_j}\right)^n。$$

从而(2-138-1)得证。

注: 由例 2-138 易推出:

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{G}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{A}\right)^n \qquad (*)$$

其中 A 为 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算术平均值。

又(*)是第三届加拿大试题:“设 $x>0$, $y>0$, 且 $x+y=1$, 则 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$。”的一个推广。

用逐次逼近方法解题一般书写篇幅较大,但思路简明,流畅,极富“操作性”,不失为一种优秀的解题方法。

习　题　2.12

1. 证明对于每个实数 R_0, 方程 $x^2+y^2+z^2=xyz$ 必有一组解 x, y, z, 它们都是大于 R_0 的整数。

2. 设有一直角 QOP, 在 OP 上求一点 A, OQ 上求一点 B, 直角内求一点 C, 使 $BC+CA$ 为定长 l 且使四边形 $ACBO$ 的面积最大。

3. (Schwarz 问题) 在锐角$\triangle ABC$ 内作内接$\triangle DEF$, 使$\triangle DEF$ 的周长最小。

4. (第 24 届 IMO 试题)已知 $a_1, a_2, \cdots a_k, \cdots, a_n$ 为两两不相等的正整数, 求证:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}。$$

5. 将 1989 分成 10 个自然数的和, 使这些自然数的积最大, 求此最大值。

第 3 章　数学竞赛中的典型问题

奥林匹克数学以其内容的广泛性，开放性区别于初等数学或高等数学的各个专门分支。它广泛涉猎到数论、图论、几何、数列、方程、多项式、…许多专题，但并不对这些专题进行系统的专门研究，只是吸收其中优美的、思想深刻的、而解法完全是初等的问题。

这样，对同一内容中形形色色的问题，就其解法进行归类和探索，无疑对提高解数学竞赛题的应变能力起到作用。

本章共分 11 个专题，介绍了处理各类问题的解题方法和策略。

3.1　含参变数不等式恒成立问题的探究

含参变数的不等式恒成立条件的探索、论证是一类难度较大的问题，在近年一些高层次数学竞赛中大量出现。这类问题要求应试者在多重变元的复杂关系中发现和确定答案，再行论证，因此对应试者有较高的能力要求。这类问题的解答需要智巧，但并非完全无章可循。下面介绍处理这类问题的一些基本的解题策略。

1. **利用特殊值,先“抓”必要条件**

如果不等式在某个区域 G **上恒成立,那么对于给定的** $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in G$,**不等式也成立。利用这一特点,我们可取特殊值,得到不等式成立的必要条件。**

[**例** 3-1] (**首届冬令营试题的推广**)**设** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **是实数,试求不等式**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

对于所有非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **恒成立的充要条件。**

解:先取特殊值探求必要条件。在(3-1-1)**式中取** $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \cdots = x_n = 0$,**得** $a_1 + a_2 \geq 0$

同理可得

$$a_i + a_j \geq 0 \qquad (1 \leq i < j \leq n) \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

再证(3-1-2)**是**(3-1-1)**式恒成立的充分条件。事实上,不等式**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i + a_j) x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (a_i + a_j) x_j x_i \geq 0$$

对所有非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **恒成立。**

[**例** 3-2] (**第** 27 **届** IMO **中国集训队选拔试题**)**设** a_1,

$a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是实数。证明: 使得对任何满足 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 的实数, 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

恒成立的充要条件是:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i (1 \leq k \leq n-1), \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

证明: 先证必要性。令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, 则由 (3-2-1) 得 $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i$。又令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -1$, 则由(3-2-1) 可得 $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i$。故 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$。

再令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = -1, x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$, 则由(3-2-1) 可得 $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$。

这样, 必要性得证。

再证充分性: 由 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$ 得

$$a_n - b_n = -\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i)$$

令 $c_i = a_i - b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $c_n = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i$。

由 $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_k$ 得 $\sum_{i=1}^{k} c_i \geq 0 \ (1 \leq k \leq n-1)$

这时

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i + c_n x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) c_i$$

再注意到 $x_1 - x_n \leq x_2 - x_n \leq \cdots \leq x_{n-1} - x_n \leq 0$, **及**

$$c_{n-1} \geq -(c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-2})$$

可得 $\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) c_i \leq \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_n) c_i - (c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-2})(x_{n-1} - x_n) = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{n-1}) c_i \leq \cdots \leq c_1(x_1 - x_2) \leq 0$。

所以 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$, **充分性得证。**

2. 利用函数的性质, 实现转化

[**例** 3-3] (**第** 29 **届** IMO **中国集训队选拔试题**) **设** A, B, C **是实数, 试求使不等式**

$$A(x-y)(x-z) + B(y-z)(y-x) + C(z-x)(z-y) \geq 0 \quad (3\text{-}3\text{-}1)$$

对于任何实数 x, y, z **都成立的充要条件。**

解: 将(3-3-1)**式改写成**

$$A(x-y)^2 - (B-A-C)(x-y)(y-z) + C(y-z)^2 \geq 0$$

在上式中令 $t = \dfrac{x-y}{y-z}$ $(y \neq z)$**得**

$$At^2 - (B-A-C)t + C \geq 0$$

把上式左边看作关于 t 的二次函数, 它对任何实数 t 恒成立的充要条件是

$$\begin{cases} A > 0 \\ (B - A - C)^2 - 4AC \leq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} A = B - A - C = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 \leq 2(AB + BC + CA) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B = C \geq 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 \leq 2(AB + BC + CA) \end{cases}$$

[例 3-4] (1986 年国家集训队选拔试题) 设 α, β, γ 是模均大于 1 的复数, 求使不等式

$$1 + |\alpha + \beta + \gamma| + |\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha| + |\alpha\beta\gamma|$$
$$\geq \lambda(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|) \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

恒成立的 λ 的最大值。

解: 由于(3-4-1)式关于 α, β, γ 对称, 故可设 $1 \geq |\alpha| \geq |\beta| \geq |\gamma|$, $\beta = b\alpha$, $\gamma = c\alpha$, $1 \geq |b| \geq |c|$, 并令 $\theta = |\alpha| \leq 1$, 则(3-4-1)式可化为

$$\lambda \leq \frac{1 + \theta|1 + b + c| + \theta^2|b + c + bc| + \theta^3|bc|}{\theta(1 + |b| + |c|)} \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

记上式右边为 u, 要(3-4-2)对 b, c, θ 的允许值范围恒成立, 必须且只须

$$\lambda \leq \min u \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

下求 u 的最小值。

由 $1 \geq |b| \geq |c|$, $\theta \leq 1$, 得

$$u \geq \frac{1 + \theta^3(|1 + b + c| + |b + c + bc| + |bc|)}{3\theta}$$

$$\geq \frac{1+\theta^3(|1+b+c|+|b+c|+|c|)}{3\theta}$$

$$\geq \frac{1+\theta^3}{3\theta} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{2\theta}+\theta^2\right)$$

$$\geq \sqrt[3]{\frac{1}{2\theta}\cdot\frac{1}{2\theta}\cdot\theta^2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

易验证，当 $\theta=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $b=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $c=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ **时**, u **取到最小值** $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$。**由**(3-4-3)**知** λ**的最大值是** $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$。

有些问题，还可利用函数的单调性来研究。

[**例** 3-5]　**设** P **为实数，求证：不等式**

$$x^P y(x-y)+y^P z(y-z)+z^P x(z-x)\geq 0$$

(3-5-1)

对于满足 $x+y>z, y+z>x, z+x>y$ **的所有正实数恒成立的充要条件是** $p\geq 2$。

证明：显然(3-5-1)**是齐次轮换对称不等式，不失一般性，可设** $x\leq y\leq 1\leq z$，**或** $x\leq 1\leq z\leq y$。**考虑关于实数** P **的函数**

$$f(P)=x^P y(x-y)+y^P z(y-z)+z^P x(z-x)$$

对 P **求导数得**

$$f'(P)=x^P y(x-y)\ln x+y^P z(y-z)\ln y+z^P x(z-x)\ln z\geq 0$$

所以 $f(P)$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **上单调递增，故当** $P\geq 2$ **时有**

$$f(P)\geq f(2)=x(y-z)^2(y+z-x)+y(x-y)$$
$$(x-z)(x+y-z)\geq 0$$

而当 $P<2$ **时，令** $x=t+t^2$, $y=1$, $z=1+t$

其中 $0<t<\frac{1}{2}$，**则** x, y, z **满足** $x+y>z, y+z>x, z+x>y$，**且**

$$f(P)=(t+t^2)^P(t+t^2-1)+(1+t)\cdot(-t)$$
$$+(1+t)^P(t+t^2)(1-t^2)=-t^P+0(t^P)$$

所以，当 t **充分小时**，$f(P)<0$

上面说明，不等式(3-5-1)恒成立的充要条件是 $P\geq 2$。

注：例 3-5 中，当 $P=2$ **时，由(3-5-1)得到一个涉及三角形三边** a, b, c **的不等式**

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$$

这个不等式最早由 E.Catalan 建立(1906)，后被第 24 届 IMO 选中作为试题。不等式(3-5-1)是 Catalan 不等式的指数推广，是由陈计、刘竞欧得到的(《数学通讯》89.11)。

3. 正反结合

有时，我们需要从正面直接导出一个不等式，通过比较得到我们所研究不等式恒成立的充分条件，然后，再用反证法或构造反例说明这个条件也是必要的。

[**例** 3-6]　(**第 33 届 IMO 国家队选拔考试试题**) **任给两自然数** $n\geq 2, T\geq 2$。**试求所有自然数** a，**使得对任意正数** $a_1, a_2, \cdots, a_n$，**都有**

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{ak+a^2/4}{S_k}<T^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

其中 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$。

解：我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\left(ak+\frac{a^2}{4}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\left[\left(k+\frac{a}{2}\right)^2-k^2\right]$$

$$= \frac{1}{S_1}\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{S_n} + \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{S_k}\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{S_{k-1}}\right]$$

对 $k = 2, 3, \cdots, n$, **令** $a_k t_k = S_{k-1}$, **于是就有**

$$\frac{1}{S_k}\left(k+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{S_{k-1}} = \frac{\left(k+\frac{a}{2}\right)^2}{a_k(t_k+1)} - \frac{(k-1)^2}{a_k t_k}$$

$$= \frac{1}{a_k t_k(t_k+1)}\left[t_k\left(k+\frac{a}{2}\right)^2 - (t_k+1)(k-1)^2\right]$$

$$= \frac{-1}{a_k t_k(t_k+1)}\left[\frac{a+2}{2}t_k - (k-1)\right]^2 + \frac{(a+2)^2}{4a_k}$$

$$\leq \frac{(a+2)^2}{4a_k}$$

这样一来,便有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\left(ak + \frac{a^2}{4}\right) \leq \frac{(a+2)^2}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \frac{n^2}{S_n}$$

因而当自然数 a **满足** $a \leq 2(T-1)$**时,由于**

$$(a+2)^2/4 \leq T^2$$

知对任何正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, **都有不等式**

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\left(ak + \frac{a^2}{4}\right) \leq T^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \frac{n^2}{S_n} < T^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

成立。

下面证明,当 $a > 2(T-1)$, **亦即** $a \geq 2T-1$ **时,存在正数** $a_1, a_2, \cdots, a_n$, **使题目中的不等式不成立。**

构造反例:任给 $a_1 > 0$, **命**

$$a_k = \frac{(a+2)}{2(k+1)}S_{k-1}, \quad k = 2, 3, \cdots, n$$

于是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **唯一确定,且对** $k = 2, \cdots, n$ **有**

$$t_k = \frac{2(k-1)}{a+2}$$

$$t_k \quad t_k + \frac{a}{2}^{\quad 2} - (t_k + 1)(k - 1)^2 = \frac{1}{4}(a + 2)^2 t_k(t_k + 1)$$

$$\frac{1}{S_k} \quad k + \frac{a}{2}^{\quad 2} - \frac{(k - 1)^2}{S_{k-1}} = \frac{(a + 2)^2}{4a_k}$$

于是就有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k} \quad ak + \frac{a^2}{4} = \frac{(a + 2)^2}{4} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - \frac{n^2}{S_n}$$

$$= \frac{(a + 2)^2}{4} - 1 \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} + \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} - \frac{n^2}{S_n}$$

(3-6-1)

根据平均值不等式知

$$S_n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2$$

从而 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} - \frac{n^2}{S_n} \geq 0$

因此由(3-6-1)**得**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k} \quad ak + \frac{a^2}{4} \geq \frac{(a + 2)^2}{4} - 1 \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \quad (3\text{-}6\text{-}2)$$

令因 $a \geq 2T - 1$, **知有**

$$\frac{(a + 2)^2}{4} - 1 \geq \frac{(2T + 1)^2}{4} - 1 > T^2$$

从而由(3-6-2)**式得到**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k} \quad ak + \frac{a^2}{4} > T^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

此与题设不合。

综上所述, 即知满足条件的自然数 a **的取值是** 1, 2, …, 2(T - 1)。

[**例 3-7**]　(**第 11 届奥地利-波兰竞赛试题**) **设** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **为自然数, 且** $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$。**试证: 对于一切不全为零的实数** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **成立不等式**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} > 0 \qquad (3\text{-}7\text{-}1)$$

的充要条件是 $a_2 \geq 2$。

证明: 先用反证法证明必要性。反设 $a_2 < 2$, **则** $a_2 = a_1 = 1$, **取** $x_4 = x_5 = \cdots = x_n = 0$, **则**(3-7-1)**式左边为** $x_1^2 + x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2)^2 + x_3(2x_2 + a_3x_3)$。**取** $x_3 = 1, x_2 = -a_3, x_1 = a_3$, **上式小于** 0, **矛盾。**

充分性, 因 $2 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n$, **且** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **不全为零, 故**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \geq x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \cdots + 2x_n^2$$

$+ 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2 > 0$, **证毕。**

4. 利用不等化相等

[**例 3-8**]　(**第三届冬令营试题**) **设** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **是给定的不全为** 0 **的实数, 如果不等式**

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \cdots + r_n(x_n - a_n) \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \qquad (3\text{-}8\text{-}1)$$

对任何实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **成立, 求** $r_1, r_2, \cdots, r_n$ **的值。**

解: 先求 r_1, **为了将** r_1 **与** $r_2, r_3, \cdots, r_n$ **分开, 令** $x_2 = a_2, x_3$

$= a_3, \cdots, x_n = a_n$，由(3-8-1)得出

$$r_1(x_1 - a_1) \leq \sqrt{x_1^2 + A_1} - \sqrt{a_1^2 + A_1} = \frac{x_1^2 - a_1^2}{\sqrt{x_1^2 + A_1} + \sqrt{a_1^2 + A_1}} \tag{3-8-2}$$

其中 $A_1 = a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2$。

由(3-8-2)可得出

$$r_1 \begin{cases} \leq \dfrac{x_1 + a_1}{\sqrt{x_1^2 + A_1} + \sqrt{a_1^2 + A_1}}, & \text{若 } x_1 > a_1 \\[2ex] \geq \dfrac{x_1 + a_1}{\sqrt{x_1^2 + A_1} + \sqrt{a_1^2 + A_1}}, & \text{若 } x_1 < a_1. \end{cases}$$

(3-8-3)

(3-8-4)

让 x_1 从 a_1 的右边趋于 a_1，则由(3-8-3)取极限得

$$r_1 \leq \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + A_1}} \tag{3-8-5}$$

让 x_1 从 a_1 的左边趋于 a_1，则由(3-8-4)取极限得

$$r_1 \geq \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + A_1}} \tag{3-8-6}$$

(3-8-5)，(3-8-6)表明

$$r_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + A_1}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

同样可得

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

上面解法是通过“$A \geq B$ 且 $B \geq A \quad A = B$”即不等变相等来达成问题的解决。对于含参数的不等式恒成立问题的等式结论,这是常用的处理办法。

习 题 3.1

1. 设对所有实数 x,不等式

$$x^2 \log_2 \frac{4(a+1)}{a} + 2x \log_2 \frac{2a}{a+1} + \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$$

恒成立,求 a 的范围。

2. 设 a, b, A, B 为已知实数,且对一切实数 x 恒有 $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x \geq 0$,求证 $a^2 + b^2 \leq 2$, $A^2 + B^2 \leq 1$。(第 19 届 IMO 试题)

3. 数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n}}$,$a_1 = 1$,求证:可以找到这样的 α 对于所有自然数 n,$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{n^\alpha} \leq 2$ 恒成立(1990 年瑞典试题)

4. 设 $0 \leq x \leq y \leq z$,若不等式 $ax + by + cz \geq 0$ 成立,求 a, b, c 应满足的充要条件。

5. 设 $x + y = k$, $x, y \in R^+$,试求 k 的取值范围,使不等式 $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{k}{2} + \frac{2}{k}\right)^2$ 恒成立(1986 年国家集训队训练题)。

3.2 不等式最优常数的寻求和判断

在近年来的数学竞赛中,经常出现一些需要判断和寻求不等式最优常数的试题,在命题时也时常需要处理这样的问

题。下面介绍处理这类问题的一些基本方法。

1. 构造特例法

[例 3-9] 若 m_a, m_b, m_c 为非钝角△ABC 的中线, R 为外接圆半径, 则 $m_a+m_b+m_c>4R$(匈牙利赛题, 证略)。问系数 4 是否可以换成更大的数?

解: 不可。事实上, 假设等腰△ABC 的底边等于 2d, h 为底边上的高($=m_c$), AA_1, BB_1 为两腰上的中线, 如图 3.1 所示。于是

$$m_a=m_b=AA_1<\frac{h}{2}+\frac{3d}{2}$$

所以 $m_a+m_b+m_c<2h+3d$

又△ABC 的外接圆半径 R 满足不等式 $R>\frac{h}{2}$,

图 3.1

所以 $m_a+m_b+m_c< 4+\frac{6d}{h} R$

设 λ是任意大于 4 的实数, 若将高 h 固定, 显然总可以选取这样的 d 使△ABC 为锐角三角形, 且 $4+\frac{6d}{h}<\lambda$, 这时便有 $m_a+m_b+m_c<\lambda R$。由此可见, 4 是使不等式 $m_a+m_b+m_c>\lambda R$ 成立的 λ的最优常系数。

此例通过构造反例说明系数的最优性, 这是一种常用的手段。

[例 3-10] (1970 波兰竞赛试题) 设 $V=\{P(x) \mid P(x)$ 为实系数二次三项式, 且 $|P(x)|\leq 1, x\in[0,1]\}$, 试求对任意的 $P(x)$ 使 $|P'(0)|\leq A$ 成立的 A 的最小值。

解: 取 $P_1(x)=8x^2-8x+1$, 则不难验证 $P_1(x)\in V$, 且 $|P_1'(0)|=8$, 故 $A\geq 8$。

下证 $A=8$ 时, 不等式 $|P'(0)|\leq 8$ 对任意的 $P(x)$ 成立。事实上, 令 $P(x)=ax^2+bx+c$,

则 $P(0)=c$, $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$, $P(1)=a+b+c$

又 $P(x)\in V$, 因此 $|P(0)|\leq 1$, $\left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leq 1$, $|P(1)|\leq 1$, 所以

$$|P'(0)|=|b|=\left|4\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right)-(a+b+c)-3c\right|$$

$$\leq 4\left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|P(1)|+3|P(0)|\leq 8$$

综上便知使题设不等式成立的最小常数 $A=8$, 8 是最优常数。

[例 3-11] (1988 年, 理科实验班复试试题) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是满足条件: (i) $\sum_{i=1}^{n} x_i=0$; (ii) $\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$; (iii) $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$ 的两组任意实数。试求使不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|\leq A(a_1-a_n) \tag{3-11-1}$$

成立的 A 的最小值。

解: 令 $n=2$, 则依题设条件有

$$x_1+x_2=0$$

$$|x_1|+|x_2|=1$$

解之，得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$，或 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$，这时(3-11-1)变为 $\frac{1}{2}(a_1-a_2)\leq A(a_1-a_2)\quad(a_1>a_2)$

所以 $A\geq\frac{1}{2}$。

再证 $A\geq\frac{1}{2}$ 时，(3-11-1)式成立。事实上，因 $a_1\geq a_i\geq a_n$，$a_1>a_n$，所以 $|2a_i-a_1-a_n|=|(a_1-a_i)-(a_i-a_n)|\leq|(a_1-a_i)+(a_i-a_n)|=|a_1-a_n|$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(2a_i-a_1-a_n)x_i\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|(2a_i-a_1-a_n)x_i|$$

$$\leq\frac{1}{2}(a_1-a_n)\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$=\frac{1}{2}(a_1-a_n)$$

$$\leq A(a_1-a_2)$$

故 $A_{min}=\frac{1}{2}$

注：在例 3-11 的式(3-11-1)中，取 $a_i=\frac{1}{i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leq\frac{1}{2}\quad1-\frac{1}{n}$$

此即 1989 年全国高中数学联赛试题。

2. 跟踪分析法

一些著名不等式(如算术——几何平均值不等)，它们的系数具有最优性。在利用这些不等式的过程中，只要跟踪分析

等号成立的条件,往往易求得我们所需要的最优常数。

[例3-12] (第33届IMO国家队选拔试题)给定自然数$n\geq 2$,求最小正数λ使得对任意正数$a_1, a_2, \cdots, a_n$以及$0,\frac{1}{2}$中的任意n个数$b_1, b_2, \cdots, b_n$只要$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1$,就有

$$a_1a_2\cdots a_n\leq\lambda(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n).$$

解:不妨设$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geq a_1b_1+a_2\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$=a_1b_1+a_2(1-b_1)\geq\frac{1}{2}(a_1+a_2)\quad(3\text{-}12\text{-}1)$$

所以由(3-12-1)和平均值不等式可得

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}\leq\frac{2a_1a_2\cdots a_n}{a_1+a_2}\leq\frac{(a_1+a_2)^2a_3\cdots a_n}{2(a_1+a_2)}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{(a_1+a_2)+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{1}{2(n-1)^{n-1}}$$

分析上面的等号成立条件,易见当$a_1=a_2=\frac{1}{2(n-1)}$,$a_3=a_4=\cdots=\frac{1}{n-1}$;$b_1=b_2=\frac{1}{2}$,$b_3=\cdots=b_n=0$时,上面的所有不等式全部取等号,所以满足题意的$\lambda$值$\lambda_{min}=\frac{1}{2(n-1)^{n-1}}$。

3. 临界值法

此法是通过研究某些变元的极限过程,发现表达式的临界值来达到目的。特别地,对于几何不等式,可考虑其图形中

某些点的边界极限或无穷远极限;对于三角不等式,可取某些角的特殊值极限;对于序列不等式,可考虑其无穷远极限;对于某些特殊函数的不等式,常考虑其不连续点的极限。

[例 3-13]　P 为△ABC 内任一点,则$(AB+BC+CA)/2<PA+PB+PC<1\cdot(AB+BC+CA)$(证略),问能否将$\frac{1}{2}$换成更大的数或将 1 换成更小的数?

解:不可。如固定 B, C, 令 A→BC 上的某定点 Q, 则$AB+BC+CA\to 2BC$,此时若让 $P\to Q$,则 $PA\to 0$, $PA+PB+PC\to BC$,故 $PA+PB+PC>k(AB+BC+CA)$ 当 $k>\frac{1}{2}$时不成立。

如固定 B, C, 让 $A\to\infty$, P 取在 A 附近,即知 $PA+PB+PC<k'(AB+BC+CA)$当 $k'<1$ 时不成立。故$\frac{1}{2}$, 1 是使不等式 $k(AB+BC+CA)<PA+PB+PC<k'(AB+BC+CA)$成立的常系数的最优值。

[例 3-14]　在锐角△ABC 中,成立着 $\sin A+\sin B+\sin C>2$(证略),问能否将 2 换成更大的数?

解:不可,如令 $A\to 0$, $B\to\frac{\pi}{2}$, $C\to\frac{\pi}{2}$,则 $\sin A+\sin B+\sin C\to 2$,因此 2 是 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的临界极值,故 $\sin A+\sin B+\sin C>K$ 当 $K>2$ 时便不能成立,因此 2 是最优的常数。

[例 3-15]　(1990 年日本奥林匹克试题)设 $n>2$,求对于任何正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,不等式

$$K<\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+a_1}<G$$

成立的 K 的最大值和 G 的最小值。

解：令 $b_i=\frac{a_{i+1}}{a_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $a_{n+1}=a_1$，则 $b_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\prod_{i=1}^{n}b_i=1$，原不等式等价于

$$K<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+b_i}<G$$

由于 $(b_1b_2)(b_2b_3)\cdots(b_nb_1)=\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^2=1$，故必存在某一项 b_ib_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n$ 且 $b_{n+1}=b_1)$ 不大于 1，不妨设 $b_1b_2\leq 1$，于是

$$\frac{1}{1+b_1}+\frac{1}{1+b_2}\geq\frac{1}{1+b_1}+\frac{1}{1+\frac{1}{b_1}}=1$$

又 $n>2$，故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+b_i}>1 \tag{3-15-1}$$

取 $b_i=m$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$，$b_n=\frac{1}{m^{n-1}}$ $(m>0)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+b_i}=\frac{n-1}{1+m}+\frac{1}{1+\frac{1}{m^{n-1}}}=\frac{n-1}{1+m}+\frac{m^{n-1}}{1+m^{n-1}}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+b_i}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{n-1}{m+1}+\frac{m^{n-1}}{1+m^{n-1}}\right)=1$$

故 K 的最大值为 1。

同理，令 $c_i=\frac{a_i}{a_{i+1}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 其中 $a_{n+1}=a_n$，则 $c_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\prod_{i=1}^{n}c_i=1$

$$G > \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{1+c_i} = n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+c_i} \qquad (3\text{-}15\text{-}2)$$

由于 K 的最大值为 1, 由(3-15-1), (3-15-2)知 G 的最小值为 $n-1$。

故问题中 K 的最大值为 1, G 的最小值为 $n-1$。

[例 3-16]　(第 28 届 IMO 预选题)求最小的实数 c, 具有如下性质: 对每一正实数的数列$\{x_i\}$, 若 $x_1+x_2+\cdots+x_n \le x_{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$则

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \le c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n} \qquad (3\text{-}16\text{-}1)$$

对任何自然数 n 成立。

解: 当 $n=2$ 时, 要(3-16-1)成立, 即要 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \le C\sqrt{x_1+x_2}$即要 $2\sqrt{x_1x_2} \le (x_1+x_2)(C-1)$成立, 由此得 c 的最小值为 $\sqrt{2}+1$。

下证当 $c=\sqrt{2}+1$ 时, 不等式(3-16-1)成立。我们用数学归纳法来完成。事实上, $\sqrt{x_1}<(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1}$, 设 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \le (\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}$, 则

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n+1}}$$

$$\le (\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\sqrt{x_{n+1}}$$

$$= (\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}-(\sqrt{2}+1)$$

$$\times \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}+\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}}+\sqrt{x_{n+1}}$$

$$\leq(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}-(\sqrt{2}+1)$$

$$\times\frac{x_{n+1}}{(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_{n+1}}}+\sqrt{x_{n+1}}$$

$$=(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}$$

这样当 $c=\sqrt{2}+1$ 时,(3-16-1)确实成立。

另一方面,取 $x_k=2^k$, $k=1,2,\cdots$,则在 $n\to\infty$ 时

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}}=\frac{(\sqrt{2})^{n+1}-1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}-1}}\to$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

这说明使不等式(3-16-1)成立的 c 的最小值为 $\sqrt{2}+1$。

习 题 3.2

1. 在△ABC 中,成立着 $\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$,问能否将 $\frac{\pi}{2}$ 改为较小的数?

2. 已知 x,y,z 均为实数,试求满足不等式 $(x^2+y^2+z^2)^2\leq n(x^4+y^4+z^4)$ 的最小整数 n。

3. 求最小正数 α 使得存在数 β 当 $0\leq x\leq 1$ 时,不等式 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\leq 2-\frac{x^\alpha}{\beta}$ 成立,对求得的 α 值,确定满足这个不等式的最小正数 β。

4*. 若对任意正整数 n 成立着

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<A$$

其中 A 为常量,问 A 的最小可能值是多少?

5. 设数 a 具有如下性质: 对于任意四个实数 x_1, x_2, x_3, x_4, 总可以取整数 k_1, k_2, k_3, k_4 使得

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4}[(x_i - k_i) - (x_j - k_j)]^2 \leq a$$

求这样的 a 的最小值。

3.3 几何不等式

几何问题中出现的不等式称为几何不等式。数学竞赛中有许多几何不等式, 以直观、简捷的陈述和创造性的思想方法而引人入胜。下面, 就几何不等式的证明方法和技巧作一分类介绍。

1. 利用"大边对大角"关系原理

众所周知, 在一个三角形中, 大边对大角。这个简单的事实, 常常成为我们证明某些几何不等式的出发点。

[例 3-17] (第 22 届前苏联竞赛试题) 设 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三内角, 求证:

$$2\left(\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\right)\leq\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\sin A+\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{A}\right)\sin B+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\sin C \qquad (3\text{-}17\text{-}1)$$

证明: 由于不等式实质上是关于边和角的一个不等式, 因此宜考虑运用大边对大角关系原理来证明。由$(a-b)(A-B)\geq 0$ 可得

$$(\sin A-\sin B)\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\geq 0$$

亦即

$$\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}\leq\frac{\sin A}{B}+\frac{\sin B}{A} \tag{3-17-2}$$

同理

$$\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin C}{C}\leq\frac{\sin A}{C}+\frac{\sin C}{A} \tag{3-17-3}$$

$$\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\leq\frac{\sin B}{C}+\frac{\sin C}{B} \tag{3-17-4}$$

将不等式(3-17-2),(3-17-3)和(3-17-4)相加整理便得不等式(3-17-1),证毕

[例 3-18] (1965 年匈牙利赛题)圆内(包括圆周上)任取 8 个点,求证其中可以找到两点,其距离小于圆的半径。

证明: 给定的 8 个点中至少有 7 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_7$ 不在圆心 O,连 $OP_1, OP_2, \cdots, OP_7$,这些射线把圆心角分成了 7 个角,其中至少有一个小于 $60°$,不妨设 $\angle P_1OP_2<60°$,则 $\angle OP_1P_2$ 与 $\angle OP_2P_1$ 中至少有一个大于 $60°$,不妨设 $\angle OP_1P_2>60°>\angle P_1OP_2$,于是在 $\triangle OP_1P_2$ 中运用大边对大角关系原理有

$$P_1P_2<OP_2\leq R$$

得证。

“对于两个三角形 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$,若已知 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$,则 $\angle A\geq\angle A'\Leftrightarrow BC\geq B'C'$”。这也是平面几何中一个熟知的结论,在解题中应用广泛。

[例 3-19] 两个凸四边形 ABCD 和 $A_1B_1C_1D_1$ 对应边相等,证明: 如果 $\angle A>\angle A_1$,那么 $\angle B<\angle B_1$, $\angle C>\angle C_1$, $\angle D<\angle D_1$。

证明: 考察 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A_1B_1D_1$,它们有两边分别对应相等,由 $\angle A>\angle A_1$ 可得 $BD>B_1D_1$。

同样,再考察$\triangle CBD$和$\triangle C_1B_1D_1$,由$BD > B_1D_1$可得$\angle C > \angle C_1$。

现在假定$\angle B \geq \angle B_1$,这时同上理由可得$AC \geq A_1C_1$,从而$\angle D \geq \angle D_1$,于是

$$360° = (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) > (\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1) = 360°$$

这矛盾。所以有$\angle B < \angle B_1$,$\angle D < \angle D_1$。

2. 化直法

将曲线段化为折线段,折线段化为直线段来处理的方法叫做化直法。化直法是证明几何不等式最为常用的方法之一。

[例3-20] 设A'为$\triangle ABC$的外角平分线AT上的任意一点,证明:$A'B + A'C \geq AB + AC$。

证明:我们把这个不等式中的较小量$AB + AC$"拉直"为一条直线段,即延长BA到C'使$AC' = AC$,如图3.2所示,连$A'C'$,显然

$$A'B + A'C' \geq BC' = BA + AC \tag{3-20-1}$$

再由$\triangle AA'C \cong \triangle AA'C'$便知$A'C' = A'C$,代入(3-20-1)左边便得所证不等式。

[例3-21] (Pólya问题)两端点在一圆周上且将此圆分成等面积的两部分的所有曲线中,以此圆的

图 3.2

直径具有最短的长度。

证明：设AB是一条满足题设条件的曲线。如果 A、B 两点正好是某一条直径的两个端点，那么显然AB的长度不会小于圆的直径。如果弦 AB 不是直径，如图 3.3 那么令与弦 AB 平行的直径为 CD，曲线AB至少与 CD 交于不同的两点，设不是圆心的那个交点为 E，则

曲线AB的长 = 曲线AE的长 + 曲线EB的长 ≥ AE + EB（这样将曲线化为了折线）。

图 3.3

下再证折线(AE + EB) > 圆的直径。为此作 B 关于 CD 的反射点 B′，则易证 AB′ 是圆的直径。于是 $AE + EB = AE + EB' > AB' =$ 圆的直径。

综上便知所证结论成立。

[例 3-22] △ABC 是正三角形，P 为平面上任一点，求证 $PA \leq PB + PC$。

分析：如能把 PA，PB，PC 移到某一三角形中，问题就容易解决了。为此用旋转法来达到移线之目的。

证明：如图 3.4，将△ABP 绕 A 点旋转 60°，得象 $\triangle ACP_1$。连结 PP_1，因为

$$\angle PAP_1 = 60°,\ AP = AP_1,$$

所以 $\triangle APP_1$ 是正三角形，因而 $PP_1 = AP$。又 $CP_1 = BP$，因此 PA，PB，PC 移到了 $\triangle PCP_1$ 中，且作为其三边，于是由 PC+

$CP_1 > PP_1$ 便得 $PC + BP > AP$,
得证。

3. 分域法

通过划分平面区域, 可使一些隐藏的不等关系显露出来。

[例 3-23] (匈牙利赛题) 三角形内的任一点到它最近顶点的距离不超过外接圆半径, 试证之。

图 3.4

证明: 设 O 是三角形△ABC 的外接圆的圆心, P 是△ABC 内任一点。如果 P 和 O 重合, 结论成立。如果 P 异于 O 点, 那么作 PO 的中垂线, 这条直线或者与△ABC 的周界相交, 或者位于△ABC 的外部, 在这两种情况下, P 至少和△ABC 的一个顶点分布在中垂线的同一侧(中垂线将平面分成的两个区域之一), 于是 P 到这个顶点的距离小于这个顶点到外心的距离(即外接圆半径), 从而题中结论自然成立。

注: 例 3-23 的证明运用了一个常用的明显的结论: 若 l 是线段 AB 的中垂线, P 与 A 位于 l 的同侧, 则 $PA < PB$。

[例 3-24] 设 A', B', C' 分别是△ABC 中 BC, CA, AB 边上的点, R 是△$A'B'C'$ 的外接圆半径, r 是△ABC 的内切圆半径, 求证: $R \geq r$, 等号当且仅当△$A'B'C'$ 是切点三角形时成立。

证明: 设 I 为△ABC 的内心, D, E, F 为内切圆与三边的切点, 易知 $ID \perp BC$, $IE \perp AC$, $IF \perp AB$。过 I 分别作边 AB, BC, CA 的平行线, 则过 I 点的三条平行线将平面分成 6 个角形区域(如图 3.5)。易知, 不管△$A'B'C'$ 的外心 O 位于哪一个

区域(或界线、界点上),$\triangle ABC$至少存在一条边,使得O到该边的距离不小于I到该边的距离(即r)。由于该边上必有$\triangle A'B'C'$的一顶点,故O到该顶点的距离(即R')不小于I到该边的距离(即r),即$R'\geq r$。

图 3.5

又由三角形内切圆的唯一存在性知,当且仅当O与I重合时,即$\triangle A'B'C'$与$\triangle DEF$重合时,$R'=r$成立。

4. 三角形剖分法

将三角形按某种规则剖分成小三角形,易于讨论问题中的各种可能情形,推证出所证几何不等式。

[例 3-25] (1978年安徽省赛题)$\triangle ABC$的面积为1,过其重心G作任意一直线l,分三角形为两部分,证明:这两部分面积之差$|S_1-S_2|$不大于$\frac{1}{9}$。

证明:如图3.6,$A_i, B_i, C_i (i=1,2)$分别为$\triangle ABC$各边之三等分点,易证A_1B_2, A_2C_2, B_1C_1三线共点,此点即是$\triangle ABC$的重心G,且图中各对应分点的连线将$\triangle ABC$分成了9个全等的小三角形。

当直线l过三角形任一边的三等分点时,显然有$|S_1-S_2|=\frac{1}{9}$。

当直线l不过各边的三等分点时,不失一般性,设l分别

交 AB, BC, A_2B_1 于 M, N, L, 显然 $\triangle MC_1G$ ≌ $\triangle LB_1G$, $\triangle MC_2G$ ≌ $\triangle LA_2G$, 于是

$$= \left| S_{A_2CNL} - S_{\triangle B_1LN} \right| < S_{\triangle B_1A_2C} = \frac{1}{9}$$

得证。

[例 3-26] (1988 年全国联赛试题) 设点 P, Q, R 将$\triangle ABC$ 周长三等分, 且 P, Q 在 AB 上, 求证

图 3.6

$$S_{\triangle PQR} > \frac{2}{9} S_{\triangle ABC}$$

证明: 同上例的方法, 将$\triangle ABC$ 剖分成 9 个全等的小三角形(如图 3.7) 显然有

$PQ = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC$ 的周长 = $\triangle AB_1C_1$ 的周长 > $2AC_1 = \frac{2}{3}AB$, 因此 P, Q 两点之一位于线段 AC_1 上, 另一点位于线段 BC_2 上。

图 3.7

又 $R \mid AB_1$, $R \mid BA_1$, 否则 $PA + AR \leq C_1A + AB_1 \leq \frac{1}{3}\triangle ABC$的周长矛盾, 因此 $R \in B_1C$ 或 $R \in A_1C$ 上, 再设 R, C

到 AB 的距离为 h 和 h, 则由上面 P, Q, R 位置的讨论得

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} PQ \cdot h' > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AB \cdot \frac{1}{3} h = \frac{2}{9} S_{\triangle ABC}, \text{得证。}$$

5. **局部调整法**

局部调整法的思想我们已在第二章 2.12 节中予以介绍, 这里仅通过一例说明其在证明几何不等式时的应用。

[例 3-27] 设 S_1, S_2, S_3 是三个多边形, A, B, C 三点分别在 S_1, S_2, S_3 内或周界上, 求证: 一定有一个以 S_1, S_2, S_3 的顶点为顶点的 $\triangle P_1P_2P_3$, 其面积不小于所有这样的 $\triangle ABC$。

证明: 首先注意到一个十分常用的引理:“ $\triangle ABC$ 的底边 BC 固定, 而顶点 A 在一条线段 PQ 上变动时, 必有 $S_{\triangle ABC} \leq \max(S_{\triangle PBC}, S_{\triangle QBC})$ (证易, 略) ”。这样, 我们便可固定 BC, 过 A 作直线交 S_1 的周界于两点(如图 3.8), 则这两点中必有一点 P_1', 使得

$$S_{\triangle P_1'BC} \geq S_{\triangle ABC}$$

若 P_1 还不是 S_1 的顶点, 再对 P_1' 所在的边用引理知存在 S_1 的顶点 P_1 使得

图 3.8

$$S_{\triangle P_1BC} \geq S_{\triangle ABC} \tag{3-27-1}$$

再固定 P_1, C, 同样可找到 S_2 的顶点 P_2, 使得

$$S_{\triangle P_1P_2C} \geq S_{\triangle P_1BC} \tag{3-27-2}$$

再固定 P_1P_2, 同样可找到 S_3 的顶点 P_3 使得

$$S_{\triangle P_1P_2P_3} \geq S_{\triangle P_1P_2C} \qquad (3\text{-}27\text{-}3)$$

由(3-27-1),(3-27-2)和(3-27-3)便得 $S_{\triangle P_1P_2P_3} \geq S_{\triangle ABC}$,得证。

注①:在同样的条件下,根据例 3-27 中的方法知还存在以 S_1, S_2, S_3 的顶点为顶点的$\triangle Q_1Q_2Q_3$ 不大于所有这样的$\triangle ABC$。

②:例 3-27 可以有许多特殊情形的变化,如:极易导出 1979 年安徽省赛题"有大小两个矩形纸片 ABCD 和 A′B′C′D′固定叠合如图 3.9, $AB = a$, $AD = b$, $AB' = \lambda a$, $AD' = \mu b$。设 P, Q 是小矩形上任意两点, R 是大矩形上任意一点,求证:$\triangle PQR$ 的面积$\leq \frac{1}{2}ab(\lambda+\mu-\lambda\mu)$。"事实上,只要取 S_1, S_2 重合为矩形 ABCD, S_3 为矩形 A′B′C′D′,则易见 S_1, S_2, S_3 的顶点为顶点的最大三角形 D′B′C′的面积为$\frac{1}{2}ab(\lambda+\mu-\lambda\mu)$便得结果。

图 3.9

6. 化归为特殊情况

有时,试题中所涉及的图形或图形中的点往往具有某种不确定性,这就需要分类讨论。在分类讨论时,常将一般情形化归为特殊情形进行处理。

[例 3-28] (第 47 届莫斯科竞赛试题)从纸三角形中剪平行四边形,证明:剪出的平行四边形的面积不会超过三角形面积的$\frac{1}{2}$。

证明:先考虑一种特殊情况:设平行四边形的边分别平行于三角形的边,则这些平行四边形面积的最大者如图 3.10 所示。设$\triangle BKC$ 和$\triangle DCL$ 的面积分别为 S_1 和 S_2, $\triangle AKL$ 的面积为 S,则

$$S_1 = \lambda^2 S, \quad S_2 = (1-\lambda)^2 S$$

图 3.10　　　　　　　　　　图 3.11

其中 $\lambda=\frac{KC}{KL}$, $1-\lambda=\frac{CL}{KL}$为相似系数。于是

$$S_1+S_2=\left[\frac{1}{2}+2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\right]S\geq\frac{1}{2}S$$

$$\therefore\quad S_{ABCD}=S-(S_1+S_2)\leq\frac{1}{2}S$$

再考虑一般情形。如果平行四边形中有一边不平行于三角形的边, 则可由三角形的一个顶点引一条平行于平行四边形这组边的直线(如图 3.11)。该直线将三角形和平行四边形分别分为两个较小的部分, 在每个小三角形中的小平行四边形, 都各有一组对边平行于小三角形的边, 只要将上述步骤进行一或两次, 即可将这种情形化归为已考察过的特殊情况, 从而命题得证。

[例 3-29]　(首届冬令营试题) 已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的 4 个顶点位于△ABC 的边上, 求证: 4 个三角形$\triangle P_1P_2P_3$, $\triangle P_1P_2P_4$, $\triangle P_1P_3P_4$, $\triangle P_2P_3P_4$ 中, 至少有一个的面积不大于△ABC 面积的$\frac{1}{4}$。

证明: **须考虑两种情况**:

第一, $\triangle ABC$ **的每一条边上均有** P_1, P_2, P_3, P_4 **中的点**, **此时至少有一条边**, **不妨设** BC **上含有其中的两个点**(**如图** 3.12)。

图 3.12

设 P_4 **到** BC **的距离**$\geq P_1$ **到** BC **的距离**, **连** P_1P_4 **及** P_4P_3, **过** P_1 **作平行于** BC **的直线**, **分别交** P_4P_3, AC **于** Q **及** R **两点**。**对于同底三角形**$\triangle P_4P_1P_2$, $\triangle QP_1P_2$, $\triangle P_3P_1P_2$, **我们有**

$$\min(S_{\triangle P_4P_1P_2}, S_{\triangle P_3P_1P_2}) \leq S_{\triangle QP_1P_2} \leq S_{\triangle RP_1P_2}$$

由于$\triangle P_2RP_1$ **与**$\triangle BRP_1$ **同底等高**, **故得**

$$\min(S_{\triangle P_4P_1P_2}, S_{\triangle P_3P_1P_2}) \leq S_{\triangle BP_1R}$$

把$\triangle BRP_1$ **放在**$\triangle BRA$ **中考察**, **若设** $BP_1: BA = x$, **那么** $S_{\triangle BRP_1} = xS_{\triangle BRA}$。

再把$\triangle BRA$ **放在**$\triangle ABC$ **中来看**, **由于** $AR: AC = 1 - x$, **所以**

$$S_{\triangle BRP_1} = xS_{\triangle BRA} = x(1 - x)S_{\triangle ABC}$$

当 $0 < x < 1$ **时**, $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$, **所以有**

$$\min(S_{\triangle P_4P_1P_2}, S_{\triangle P_3P_1P_2}) \leq \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

第二, $\triangle ABC$ **中有一边不含** P_1, P_2, P_3, P_4 **中的任何一点**(**如图** 3.13)。**不妨设** BC **就是这样的边**。**这时**, **用** P_2P_3 **替代** BC, **利用前述情形知四个小三角形中必有一个的面积**$\leq \frac{1}{4}$ $S_{\triangle AP_2P_3}$, **但因** $S_{\triangle AP_2P_3} < S_{\triangle ABC}$, **结论仍然成立**。

注: 在例 3-29 中, 第二种情形的证明利用了第一种情形, 而在第一种情形中, 又以 $P_1P_4 /\!/ BC$ 时的状态为基本情形。因此上面的解法是两次利用化归特殊情形法来达到目标的。

7. 面积方法

图 3.13

关于几何图形的面积不等式在数学竞赛中大量出现。不仅如此, 面积还作为一种工具, 作为一种方法能导出一些形式上与面积无关的不等式。下面仅举两个这样的例子。

[例 3-30] (Erd s - Mordell 不等式) 设 P 是△ABC 内或周界上任一点, P 到三边的距离为 x, y, z, 则

$$PA + PB + PC \geq 2(x + y + z)$$

(下面介绍张景中教授给出的面积证法, 证法十分简明。)

证明: 如图 3.14, 过 P 作 MN, 使∠AMN = ∠ACB, 于是

图 3.14

$$\triangle AMN \backsim \triangle ACB$$

由于 $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle AMP} + S_{\triangle ANP}$, 所以有

$$AP \cdot MN \geq y \cdot AN + z \cdot AM$$

所以

$$AP \geq y \cdot \frac{AN}{MN} + z \cdot \frac{AM}{MN} \qquad (3\text{-}30\text{-}1)$$

又△AMN∽△ACB, 所以$\frac{AN}{MN}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$, $\frac{AM}{MN}=\frac{b}{a}$, 代入(3-30-1)得

$$AP \geq y\ \text{¡¤}\frac{c}{a}+z\ \frac{b}{a} \qquad (3\text{-}30\text{-}2)$$

同理

$$BP \geq x\ \text{¡¤}\frac{c}{b}+z\ \text{¡¤}\frac{a}{b} \qquad (3\text{-}30\text{-}3)$$

$$CP \geq x\ \text{¡¤}\frac{b}{c}+y\ \text{¡¤}\frac{a}{c} \qquad (3\text{-}30\text{-}4)$$

将(3-30-2), (3-30-3), (3-30-4)三个不等式相加得

$AP+BP+CP \geq x\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+y\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+z\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq 2x+2y+2z$, 这便是所要证的结果。

[例 3-31] (第 15 届全俄中学生竞赛试题) 证明: 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时, 不等式

$$\frac{2\cos x}{1+\cos x}<\frac{\sin x}{x}$$

成立。

证明: 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$内, 所证不等式等价于$\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{2}>x$, 下用单位圆中的面积关系证明它。

在单位圆里构作图 3.15。在直角△CBD 中 CB< CD。又 AC= CB, 所以 AC< CD, 于是

$$S_{\triangle ACB}<S_{\triangle CBD}$$

所以 $S_{\text{四边形}OACB}-S_{\triangle OAB}<S_{\triangle OAD}-S_{\text{四边形}OACB}$, 从而有

$$S_{\text{四边形}OACB}<\frac{1}{2}\left(S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OAD}\right) \qquad (3\text{-}31\text{-}1)$$

又由 $S_{扇形OAB} < S_{四边形OACB}$ 所以由(3-31-1)得

$$S_{扇形OAB} < \frac{1}{2} S_{\triangle OAB} + S_{\triangle AOD} \qquad (3\text{-}31\text{-}2)$$

由于 $S_{扇形OAB} = \frac{1}{2}x$, $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\sin x$, $S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}x$, 代入(3-31-2)得 $x < \frac{\sin x + \operatorname{tg}x}{2}$, 这便是所要证的。

图 3.15

8. 度量公式法

我们把正弦定理, 余弦定理, 面积公式等统称为三角形的度量公式, 利用度量公式可将几何不等式转化为简单的三角不等式。

[例 3-32] 设△ABC 的三边为 a, b, c, 其角平分线的延长线与外接圆相交所得线段长为 T_a, T_b, T_c, 求证: $abc \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} T_a T_b T_c$。

证明: 如图 3.16 由余弦定理

$$BE^2 = c^2 + T_a^2 - 2cT_a\cos\frac{A}{2}$$

$$CE^2 = b^2 + T_a^2 - 2bT_a\cos\frac{A}{2}$$

因 BE = CE, 所以由上两式右边相等可解得

$$T_a = \frac{b + c}{2\cos\frac{A}{2}}$$

图 3.16

再用平均值不等式便有 $T_a \geq \dfrac{\sqrt{bc}}{2\cos\dfrac{A}{2}}$,

同理 $$T_b \geq \frac{\sqrt{ca}}{2\cos\dfrac{B}{2}},\ T_c \geq \frac{\sqrt{ab}}{2\cos\dfrac{C}{2}}$$

将这三个不等式相乘便得

$$T_aT_bT_c \geq \frac{abc}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} \tag{3-32-1}$$

再由熟知的三角不等式 $\cos\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, 据 (3-32-1) 便得所证不等式。

[例 3-33]　(第 11 届美国竞赛试题) 在等边△ABC 的内部取一点 A_1, 在△A_1BC 的内部取一点 A_2。证明:

$$\frac{S_1}{P_1^2} > \frac{S_2}{P_2^2}$$

其中 S_1, S_2 与 P_1, P_2 分别是△A_1BC 和△A_2BC 的面积与周长。

证明：首先，设三角形的边长为 a, b, c，它们的对角为 α，β，γ，周长为 P，面积为 S 且内切圆半径为 r，则由度量公式通过解三角形易得：

$$a = r\ \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}, \quad b = r\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$c = r\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{P^2}{S} = \frac{2P^2}{Pr} = \frac{2(a+b+c)}{r}$$

$$= 4\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

所以，为证题中结论，只须证明

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha_1}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta_1}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma_1}{2} < \mathrm{ctg}\frac{\alpha_2}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta_2}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma_2}{2}$$

其中 $\alpha_j = \angle BA_jC$，$\beta_j = \angle A_jBC$，$\gamma_j = \angle A_jCB$，$j = 1, 2$。考虑 $\triangle A_1BC$ 的边上的点 A_3，即直线 BA_2 与边 A_1C 的交点 A_3（如图 3.17），记 $\gamma_3 = \angle A_3CB$ 则 $\gamma_1 = \gamma_3$，所以对 $\triangle A_1BC$ 和

图 3.17

$\triangle A_3BC$，归结为证明下面的不等式

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta_1}{2}<\operatorname{ctg}\frac{\alpha_3}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta_3}{2}$$

为此,只须注意 $\operatorname{ctg}\frac{\alpha_j}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta_j}{2}=\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha_j}{2}+\frac{\beta_j}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha_j}{2}\sin\frac{\beta_j}{2}}=\dfrac{2\cos\frac{\gamma_j}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha_j}{2}-\frac{\beta_j}{2}\right)-\sin\frac{\gamma_j}{2}}$ 及不等式 $\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}>\cos\frac{\alpha_3-\beta_3}{2}$(它由 $\alpha_3>\alpha_1>\frac{\pi}{3}>\beta_1>\beta_3,\ 0<\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}<\frac{\alpha_3-\beta_3}{2}<\frac{\pi}{2}$ 推出),于是得到

$$\frac{S_1}{P_1^2}>\frac{S_3}{P_3^2} \qquad (3\text{-}33\text{-}1)$$

其中 S_j, P_j 是△A_jBC 的面积与周长,$j=1,3$。对△A_3BC 与△A_2BC 再用所证明的事实(3-33-1)(注意点 A_2 在△A_3BC 的边 A_3B 上)即得

$$\frac{S_3}{P_3^2}>\frac{S_2}{P_2^2} \qquad (3\text{-}33\text{-}2)$$

于是由(3-33-1),(3-33-2)便得所证不等式。

9. 代数化方法

在形形色色的几何不等式中,有很多都可用相关知识代数化。

[例 3-34] 半径为 R 和 r 的两圆相交,若公共弦恰与连心线长度相等,求证: $\sqrt{2}-1\leq\frac{R}{r}\leq\sqrt{2}+1$。

证明: 如图 3.18 设公共弦长为 P,且不妨设 $R\geq r$,于是由题设条件得

图　3.18

$$\sqrt{R^2-\left(\frac{P}{2}\right)^2}\pm\sqrt{r^2-\left(\frac{P}{2}\right)^2}=P$$

消去根号得

$$2P^4-2(R^2+r^2)P^2+(R^2-r^2)^2=0$$

于是判别式

$$\triangle=4(R^2+r^2)^2-8(R^2-r^2)^2\geq 0$$

即 $R^4-6R^2r^2+r^4\leq 0$，由此解得

$$3-2\sqrt{2}\leq\frac{R^2}{r^2}\leq 3+2\sqrt{2}$$

再两边开方便得所证不等式。

[例 3-35]　设 P 是$\triangle ABC$ 所在平面上的任一点，求证：

$$a\cdot PB\cdot PC+b\cdot PA\cdot PC+c\cdot PA\cdot PB\geq abc$$

证明：将$\triangle ABC$ 所在的平面作为复平面，设 P, A, B, C 分别对应着复数 z, z_1, z_2, z_3，令

$$f(z)=\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}+\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}$$

则 $f(z)$ 是关于 z 的二次多项式，易见 $f(z_1)=f(z_2)=f(z_3)$

$= 1$，故 $f(z) \equiv 1$，也就是

$$\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}+\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)} \equiv 1 \tag{3-35-1}$$

利用模的基本性质，由(3-35-1)得

$$\frac{|z-z_2||z-z_3|}{|z_1-z_2||z_1-z_3|}+\frac{|z-z_1||z-z_3|}{|z_2-z_1||z_2-z_3|}+\frac{|z-z_1||z-z_2|}{|z_3-z_1||z_3-z_2|} \geq 1$$

稍经整理便得所证不等式，证毕。

在证明关于三角形各元素的不等式时，常用到正数代换法：三个正数 a, b, c 构成一个三角形三边的充要条件是存在正数 x, y, z 使得 $a = y + z$，$b = x + z$，$c = x + y$。(这个结论的充分性可直接验证，必要性可通过图3.19中的分解便可看出)

利用正数代换，可将关于三角形的几何不等式，化为正实数的不等式进行证明。

图 3.19

[例 3-36] 第(24届 IMO 试题)设 a, b, c 是三角形的边长，求证

$$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b) \geq 0$$

证明：令 $a = y + z$，$b = x + z$，$c = x + y$，则原不等式等价于

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z)$$

即

$$\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y} \geq x + y + z \tag{3-36-1}$$

下证(3-36-1)

由柯西不等式有

$$(x+y+z)\ \frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\ \geq (z+x+y)^2$$

两边约去 $x+y+z$ 便得(3-36-1)。故原不等式得证。

[例 3-37] 在△ABC 中, 求证

$$I=\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ \ \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ \leq\frac{1}{3}$$

证明: 利用平均值不等式

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\ \ \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\leq\frac{1}{2}\ \ \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \tag{3-37-1}$$

同理

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{1}{2}\ \ \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \tag{3-37-2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\leq\frac{1}{2}\ \ \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} \tag{3-37-3}$$

将(3-37-1), (3-37-2)和(3-37-3)相加并注意到熟知的恒等式

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$$

可得

$$I\leq\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}$$

$$=\ \ \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\ ^2-2I$$

$$=1-2I$$

即 $I \le 1-2I$，所以 $I \le \frac{1}{3}$，这便是所要证明的。

10．三角形嵌入法

我们将不等式 $x^2+y^2+z^2 \ge 2xy\cos C+2yz\cos A+2xz\cos B$（其中 x, y, z 是实数，$A+B+C=\pi$），叫做三角形嵌入不等式，它是一个容纳量很大的不等式，由它可推出许多几何不等式来。

[例 3-38] 在△ABC 和△A′B′C′中，求证：

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C \ge \frac{\cos A'}{\sin A}+\frac{\cos B'}{\sin B}+\frac{\cos C'}{\sin C} \tag{3-38-1}$$

证明：利用余弦定理和面积公式 $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A$ 可得

$$\operatorname{ctg}A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\triangle}$$

同理

$$\operatorname{ctg}B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4\triangle},\quad \operatorname{ctg}C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle}$$

将它们代入不等式(3-38-1)整理便得

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{4\triangle\cos A'}{\sin A}+\frac{4\triangle\cos B'}{\sin B}+\frac{4\triangle\cos C'}{\sin C} \tag{3-38-2}$$

再由面积公式，(3-38-2)可变为等价形式

$$a^2+b^2+c^2 \ge 2ab\cos C'+2ac\cos B'+2bc\cos A' \tag{3-38-3}$$

(3-38-3)正好是三角形嵌入不等式的一个特例。故(3-38-1)得证。

[例 3-39]　设 $x, y, z \in R$，且 $k_1, k_2, k_3 \in 0, \frac{1}{2}$，且 $k_1 + k_2 + k_3 = 1$。证明:

$$k_1k_2k_3(x+y+z)^2 \geq yzk_1(1-2k_1) + zxk_2(1-2k_2) + xyk_3(1-2k_3)$$

证明: 由题设易证 k_1, k_2, k_3 构成一个三角形，设为 $\triangle ABC$，则由余弦定理可得

$$\cos A = \frac{k_2^2 + k_3^2 - k_1^2}{2k_2k_3} = \frac{(k_2+k_3)^2 - k_1^2 - 2k_2k_3}{2k_2k_3} = \frac{1-2k_1}{2k_2k_3} - 1$$

同理 $\cos B = \frac{1-2k_2}{2k_3k_1} - 1$，　$\cos C = \frac{1-2k_3}{2k_1k_2} - 1$

将以上三个等式代入三角形嵌入不等式，化简整理即得所要证的不等式。

注: 例 3-39 题多次被用作中数杂志的征解题(如《数学通讯》(武汉) 1988.11)。

[例 3-40]　设 P 为 $\triangle ABC$ 内部或边上任一点，记 $PA = x, PB = y, PC = z$，求证:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

证明: 如图 3.20，分别过 A, B, C 作 PA, PB, PC 的垂线，三垂线两两相交于 A', B', C'，于是

$\angle BPC = \pi \quad A'$，

$\angle APB = \pi \quad C'$，

$\angle APC = \pi \quad B'$

在 $\triangle BPC$ 中用余弦定理可得

图　3.20

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\angle BPC$$
$$= y^2 + z^2 + 2yz\cos A'$$

同理 $b^2 = x^2 + z^2 + 2xz\cos B'$, $c^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos C'$

这样便有 $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy\cos C' + 2xz\cos B' + 2yz\cos A'$,再由三角形嵌入不等式便得

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) + x^2 + y^2 + z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

这便是所证不等式。

11. 一些特殊方法

上面介绍了证明几何不等式一些常用的方法。下面就一些较为特殊的技巧和方法进行介绍,这些方法和技巧一般用于解一些具有较高难度的竞赛题。

[例 3-41] (1975 年前苏联基辅赛题)一个凸 n 边形可以放置在一个单位正方形内,证明:能够找到这个凸 n 边形的三个顶点 A,B,C 使得 $S_{\triangle ABC} \leq \frac{8}{n^2}$。

证明:如图 3.21,凸 n 边形的边顺次记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,设 x_i, y_i 是边 a_i($i = 1, 2, \cdots, n$)在正方形相邻两条边上的投影。

因为 n 边形是凸的,则在正方形边上每个点至多被多边形两条边上点的投影所复盖,因此

图 3.21

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 2,\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq 2$$

由 $a_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq x_k + y_k$

所以 n 边形的周长 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leq 4$。这样 $a_1+a_2, a_2+a_3, \cdots, a_{n-1}+a_n, a_n+a_1$ 中至少有一个不超过 $\frac{8}{n}$, 不妨设 $a_1+a_2\leq\frac{8}{n}$, 则以 a_1, a_2 为相邻边的三角形面积 $S\leq\frac{1}{2}a_1a_2\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\leq\frac{8}{n^2}$, 这个三角形即为所求。

此题的证明是通过研究图形的射影来达到目的的, 可认为是射影方法在证明几何不等式时的运用。

[例 3-42] (1972 年波兰赛题) 一条折线包含在边长为 50 的正方形中, 正方形边上各点与折线上各点之距离不小于 1, 求证折线长度大于 1248。

图 3.22

证明: 设折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 具有题设性质, 如图 3.22 和图 3.23, k_i 是以点 A_i 为圆心, 半径为 1 的圆, F_i 是由与连心线 A_iA_{i+1} 平行且与它距离为 1 的两条直线以及圆 k_i 和 k_{i+1} 的两条弧所围成的图形(图中阴影部分为 F_i)。

图 3.23

与线段 A_iA_{i+1} 上某点距离小于 1 的点所成的集合在圆 k_i, k_{i+1} 及图形 F_i 的并集中。由题设条件可知边长为 50 的正方形含在集

$$k_1\cup F_1\cup k_1\cup F_2\cup\cdots\cup k_{n-1}\cup F_{n-1}\cup k_n=\bigcup_{i=1}^{n-1}(k_i\cup F_i)\cup k_n$$

之中。因为图形 $(k_i\setminus k_{i+1})\cup f_i$ 的面积 $=2\cdot A_iA_{i+1}$, 所以图形 $k_i\cup F_i$ 的面积不小于 $2A_iA_{i+1}$。而圆 k_i 的面积等于 π。因此正方形面积不超过图形 $k_i\cup F_i$ 与圆 k_n 的面积之和, 亦即

$$2500\leq 2\sum_{i=1}^{n-1}A_iA_{i+1}+\pi$$

因此, 折线长 $=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}A_iA_{i+1}\geq 1250-\frac{\pi}{2}>1248$。

上例通过构造易求面积的特殊图形的集合。然后用其并集覆盖我们所研究的图形, 根据面积原理, 便导出了我们要证的结论。

[例 3-43]　(第 26 届 IMO 预选题) 两个等边三角形内接于一个半径为 r 的圆, 设 K 为两三角形重叠处的面积, 证明:

$$2K\geq r^2\sqrt{3}$$

证明: 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 是内接于⊙O 的两个正三角形, 将 AB 与 PR 的交点, AB 与 PQ 的交点分别用 D, E 表示, 如图 3.24。由旋转对称性, 整个图形对称于直径 OD 及 OE, 而且

$$K=S_{\triangle ABC}-3S_{\triangle PDE}$$

故当 $\triangle PDE$ 面积最大时, K 取得最小值。直观地, 我们可以期望在 P 为弧 AB 中点时, $\triangle PDE$ 面积达到最大。要证明这一点, 只要注意到 $PD=AD$, $PE=BE$, 则 $\triangle PDE$ 有固定周长=

$AB=\sqrt{3}r$。利用等周定理(给定周长的三角形中,等边三角形面积最大),因此当 P 为弧 AB 中点时△PDE 面积最大,在这种情况下,△PDE 的各边长为△ABC 边长的$\frac{1}{3}$,故

图 3.24

$$K \geq S_{\triangle ABC} \quad 1-\frac{2}{9} =$$

$\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$,得证。

上例是利用等周定理来证明几何不等式。形形色色的等周定理是我们证明几何不等式和求解几何极值问题的有力工具。

[例 3-44] (第 44 届莫斯科数学竞赛试题)设 X 和 Y 是两个凸多边形,并且多边形 X 包含在 Y 之内。以 S(X)和 S(Y)记这两个多边形的面积,以 P(X)和 P(Y)记它们的周长。证明:$\frac{S(X)}{P(X)}<2\frac{S(Y)}{P(Y)}$。

证明:先证引理:“若 M 为凸多边形,S 为其面积,P 为其周长,而 $r=r(M)$是含于 M 内部的最大圆的半径,则有$\frac{1}{2}r\leq\frac{S}{P}\leq r$。”

事实上,在多边形 M 的每一条边上向多边形内部作矩形,使它们另一边的长度都为$\frac{S}{P}$。由于这些矩形必有互相重叠

者，而面积之和又与多边形面积相等。因此在距离各边超过 R 的地方，有未被复盖的点。以该点为中心，$\frac{S}{P}$为半径的圆就完全落入多边形 M 内部。这就是说 M 内可容纳一个半径为$\frac{S}{P}$的圆，因此$\frac{S}{P}\leq r$，引理右边的不等式得证。设 M 包含的最大圆的圆心为 O，连接圆心 O 与多边形的各个顶点。这时多边形被分成面积为$\frac{1}{2}h_ia_i$的多个三角形，这里 h_i 是从点 O 至第 i 边的距离，a_i 是第 i 条边的长度。由于 $h_i\geq r$，那么

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}h_ia_i\geq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}ra_i=\frac{1}{2}rP$$

从而有$\frac{S}{P}\geq\frac{1}{2}r$，这正是引理左边的不等式。

下证题中的不等式成立。由引理知

$$\frac{S(X)}{P(X)}\leq r(X)\leq r(Y)\leq 2\frac{S(Y)}{P(Y)},$$ 得证。

这是一个典型的组合几何不等式问题，在上面的证明过程中，采用了组合分析和几何论证相结合的方法进行处理，请读者注意掌握运用。

几何不等式有着十分丰富的内容，由于内容的综合性，表述的直观和美，至使几何不等式成为数学竞赛的一个热点出题区。特别是组合几何不等式，在一些高层次的数学竞赛中更是经常出现。限于篇幅，我们只介绍了证明几何不等式的一些常用方法，而且只就平面几何中的不等式予以了介绍，空间中的不等式将穿插在后面“空间问题的解题策略”一节中予以介绍。

习　题　3.3

1．证明：在三角形中角 A 为锐角当且仅当 $m_a > \frac{1}{2}a$，这里 m_a 为 a 边上的中线。

2．设 h 是非钝角三角形的最大高线。证明：$r + R \leq h$。(r、R 分别为三角形的内、外切圆半径)。

3．设 P 是△ABC 平面上任一点，求证

$$a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + cPC^2 \geq abc$$

4．求证在△ABC 中成立不等式

$$(a+b+c)^3(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq 27a^2b^2c^2$$

5．在边为 1 的正方形内有折线，长度为 L，已知正方形上每个点与这折线的距离小于 ε，证明：$L \geq \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{\pi}{2\varepsilon}$。

6．两个全等的矩形的边有 8 个交点，证明：这两个矩形的公共部分的面积大于每个矩形面积之半。

7．在半径为 R 的圆形桌上，放置不重叠的 n 个半径为 r 的圆形硬币，并且不能再多放一个硬币。证明：$\frac{R}{r} \leq 2\sqrt{n} + 1$。

8．设 A'，B'，C' 分别位于锐角△ABC 的边 BC，CA，AB 上，且将△ABC 的周长三等分。若记 BC = a，CA = b，AB = c，$\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径为 R'，求证：$a + b + c \leq 6\sqrt{3}R'$。

3.4　组合数学中的三大原理及应用

抽屉原理、容斥原理、富比尼原理是组合数学中的三大基本原理。尽管它们的陈述都非常简单，但若能灵活而巧妙地运用，往往能收到出奇制胜的效果，帮助我们解决形形色色的组合分析问题。

1. 抽屉原理

(1) 第一型抽屉原理

第一型抽屉原理就是一般资料中谈及的抽屉原理,又叫鸽笼原理,邮箱原理,也有人称为狄利克雷原理。它的道理十分简单。比如,现在要把10本书放进9个抽屉内,那么不论怎样放,至少总有一个抽屉内会放两本或者两本以上的书。用严格一点的数学术语,抽屉原则可用下列定理表述。

定理3.1 把 $mn+1$ 个元素分成 n 个集合,其中必有一个集合至少含有 $m+1$ 个元素。

对于无穷集合,我们有定理3.2。

定理3.2 把一个无穷多个元素的集合分成有限个子集,其中必有一个子集仍含有无穷多个元素。

对于几何问题,有时需用到定理3.3。

定理3.3 有 n 个面积分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的平面图形,全含在一个面积为 A 的平面区域内,如果 $\sum_{i=1}^{n} A_i \geq A$,则无论这几个图形如何放置,至少有某两个图形 A_i 与 A_j 将有公共部分(成立等号时,至少将有公共边界)。反之,如果有 $\sum_{i=1}^{n} A_i < A$,则无论这几个图形如何放置,将不能盖住区域 A。

定理3.3常称为重叠原理,若把平面图形改为空间图形或曲线,面积改为体积或弧长,则相应的有体积或弧长的重叠原理。

利用第一型抽屉原理(定理3.1～定理3.3)解题的关键

在于如何根据题意，合理地构造出抽屉。下面结合一些具体的例子，谈谈构造抽屉的一些方法和技巧。

[例 3-45]　(第 32 届美国普特南数学竞赛试题)任意给定空间中九个格点(即坐标皆为整数的点)，求证：它们之中必有两点存在，使连接这两点的直线段内部含有格点。

分析：对两点(x_1, y_1, z_1)与(x_2, y_2, z_2)，我们易联想到其连线中点的坐标 $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}$。当 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ 为整数时，为保证$\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}$为整数，须且只须 $x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2$ 为偶数，也即 x_1 与 x_2，y_1 与 y_2，z_1 与 z_2 有相同的奇偶性。故可考虑按奇偶性分类构造抽屉。

证明：设 9 个给定格点的坐标为(x_i, y_i, z_i)　$i=1, 2, \cdots, 9$。首先取各点的第一坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_9$。由抽屉原理知，其中必有五个具有相同的奇偶性，不妨设它们为 $x_1, x_2, \cdots, x_5$。

取出相应的第二个坐标 $y_1, y_2, \cdots, y_5$，同理可知其中至少有三个点具有相同的奇偶性。不妨设为 y_1, y_2, y_3，其相应的第三个坐标 z_1, z_2, z_3，同理知 z_1, z_2, z_3 中至少有两个点具有相同的奇偶性，不妨设为 z_1, z_2。

于是有两点(x_1, y_1, z_1)与(x_2, y_2, z_2)，由于 x_1 与 x_2，y_1 与 y_2，z_1 与 z_2 具有相同的奇偶性，所以$\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}$必为整数，则 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ 为格点，命题得证。

[例 3-46]　(第十届莫斯科竞赛试题)在前 200 个自然数中任取 101 个数，求证：一定存在两个数，其中一个是另一个的整数倍。

分析: 若能把前 200 个自然数划分为 100 个集合, 使每一个集合中的任意两个数, 其中之一是另一个的倍数, 那么由抽屉原理知结论显然。注意到一切自然数都可表示成"奇数"$\times 2^k(k=0,1,2,\cdots)$的形式。若把式中的"奇数"部分相同的自然数作为一个集合

$$A_m=\{x \mid x=(2m-1)2^k, m,k\in N, k=0,1,2,\cdots\}$$

这时同一集合中任两数, 其中之一是另一个的倍数, 且任何两个集合的交为空集, 这正满足"抽屉"要求。

证明: 把前 200 个自然数分为如下 100 个集合:

$$A_1=\{1\times 2^0, 1\times 2^1, 1\times 2^2, \cdots, 1\times 2^7\}$$

$$A_2=\{3\times 2^0, 3\times 2^1, 3\times 2^2, \cdots, 3\times 2^6\}$$

$$A_3=\{5\times 2^0, 5\times 2^1, 5\times 2^2, 5\times 2^3, 5\times 2^4, 5\times 2^5\}$$

……

$$A_{99}=\{197\times 2^0\}, \quad A_{100}=\{199\times 2^0\}$$

显然 $A_i\cap A_j=$ $(i,j=1,2,\cdots,100, i\neq j)$且

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{100}=\{1,2,3,\cdots,200\}$$

由抽屉原理知, 不论以任何方式从前 200 个自然数中取出 101 个数, 必然至少有两个数是取自同一集合的, 在同一集合中, 较大的数必是较小数的倍数, 命题得证。

[例 3-47] (第 12 届莫斯科竞赛试题) 任给 100 个整数, 求证: 一定可以从中找到若干个整数, 使得它们的和可被 100 整除。

证明: 设已知的整数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$, 考察数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$的前 n 项和构成的数列 $s_1, s_2, \cdots, s_{100}$。

若 $s_1, s_2, \cdots, s_{100}$中有某个数可被 100 整除, 则命题得证。否则, 即 $s_1, s_2, \cdots, s_{100}$均不能被 100 整除, 这样, 它们被 100 除

后余数必是$\{1, 2, \cdots, 99\}$中的元素。由抽屉原理知 $s_1, s_2, \cdots, s_{100}$ 中必有两个数，它们被 100 除后有相同的余数，不妨设这两个数为 $s_i, s_j\ (i < j)$，则 $100 | s_i - s_j$，即有 $100 | (a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j)$，命题得证。

[例 3-48]　(1972 年前南斯拉夫竞赛试题) 对每个自然数 n，求最大的正整数 k，使得在 n 元集合中，可以取出 k 个子集，其中任意两个子集的交集非空。

证明：在集合 $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中取定一个元素 a_1，并只考虑含 a_1 的子集，这类子集的个数为集合$\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$的子集个数，即为 2^{n-1}，因此 $k \geq 2^{n-1}$。另一方面，设从集合 X 取出至少 $2^{n-1} + 1$ 个子集，将集合 X 的所有子集分为 2^{n-1}对，每一对由一个子集及其补集组成。于是由抽屉原理知，所取的子集至少有两个组成一对，因此它们不交，于是 $k < 2^{n-1} + 1$。故所求的 $k = 2^{n-1}$。

[例 3-49]　试证：$n^2 + 1$ 个实数所组成的每一序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$，含有一个长为 $n+1$ 的递增子序列或一个长为 $n+1$ 的递减子序列(序列的长为 $n+1$ 是指序列的项数有 $n+1$ 项)。

证明：假设没有长为 $n+1$ 的递增子序列，我们证明，这时必有一个长为 $n+1$ 的递减子序列。对于每个 $k(1 \leq k \leq n^2 + 1)$，令 m_k 为以 a_k 开头的最长的递增子序列的长。由假设对于每一个 $k(1 \leq k \leq n^2 + 1)$ 有 $m_k \leq n$。由于对每个 $k(1 \leq k \leq n^2 + 1)$ 有 $m_k \geq 1$。所以数 $m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$就是 1 和 n 之间的 $n^2 + 1$ 个数。利用抽屉原理知在 $m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$中必有 $n+1$ 个数都是相同的。于是可设 $m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}}$，其中 $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \leq n^2 + 1$。

下证 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 是一个长为 $n+1$ 的递减子序列。假设对于某个 $i(1\leq i\leq n)$ 有 $a_{k_i}< a_{k_{i+1}}$, 则因 $k_i< k_{i+1}$, 我们可取一以 $a_{k_{i+1}}$ 为首项的最长的递增子序列, 且把 a_{k_i} 放到前面去, 从而得到一个以 a_{k_i} 为首项的递增子序列。由于这意味着 $m_{k_i} > m_{k_{i+1}}$, 矛盾, 所以对任何的 $1\leq i\leq n$, 必有 $a_{k_i}\geq a_{k_{i+1}}$, 也就是 $a_{k_1}\geq a_{k_2}\geq\cdots\geq a_{k_{n+1}}$。这就证明了题中的结论成立。

注: 例 3-49 是由匈牙利的两个著名数学家 P. Er ds 和 A. Szekeres 最早发现。它有这样一个有趣的等价叙述: 设 n^2+1 个人肩挨肩地排在一条直线上, 则总能选出 $n+1$ 个人, 当令他们向前跨一步时, 从左到右他们的高度是递增的(或递减的)。

[例 3-50]　把 1, 2, 3, …, 1977, 1978 按任意方式分成 6 组, 则必有一组有这样的性质: 其中至少有一个数, 或是等于同一组中其他两数之和, 或是等于另一数的两倍。

(本题实质上就是第 20 届 IMO 试题中的"国际社团"问题, 曾在前面"染色方法"一节中给出过一个证明。这里用抽屉原理再给出另一个证明。)

证明: 用反证法。假设任一组数都不具备上述性质, 那么由此可推知, 每一组中的数都具备下列性质(*):

同一组数中任何两数之差必不在这个组中。这是因为, 若 a, b 和 $b-a$ 这三数在同一组中。那么由等式 $a+(b-a)=b$ 可知, 这一组数已经具备欲证的性质了。

因 $\frac{1978}{6}>329$, 由抽屉原理, 可以肯定有一个数组 A, 其中至少含 330 个数。现从 A 中任意取出 330 个数来, 记其中最大的那一个数为 m_1。把 m_1 减去其余的 329 个数, 得到的 329 个数既是正整数又小于 1978, 而且由性质(*)知, 它们必

不在组 A 中,即应属于其余五个数组。又由$\frac{329}{5}>65$,再根据抽屉原理,可以肯定有一个数组 B,其中至少含上述 329 个中的 66 个数。再从 B 中任取上述 329 个数中的 66 个来,记其中最大的那一个为 m_2。把 m_2 减去其余的 65 个数,得出新的 65 个数,由性质(*),它们必不属于 B。现在指出,这 65 个数也不会属于 A,假若其中有某一个数(m_2-b)属于 A,因 m_2 与 b 可以写为:

$$m_2=m_1-a_1 \qquad (a_1 \text{ 属于 } A)$$

$$b=m_1-a_2 \qquad (a_2 \text{ 属于 } A)$$

这就导致 $a_2-a_1=(m_1-a_1)-(m_1-a_2)=m_2-b\in A$,与 A 具有性质(*)矛盾。这就是说,这 65 个数必属于其余四个数组。由$\frac{65}{4}>16$,根据抽屉原理又可断言,必有一个数组 C 至少含有上述 65 个数中的 17 个数,仍从 C 中任取上述 65 个数中的 17 个,记其最大者为 m_3。把 m_3 减去其余 16 个数字,而得出新的 16 个数;仿照前面的推理可以证明,它们既不属于 C,也不会属于 B 与 A,而只能属于其余三个数组 D,E,F 之一。同样进行上面的作法,可以断言在最后一个数组 F 中含有两个数,其中的大数减去小数所得之差,一方面是不超过 1978 的正整数,同时又不属于 A,B,C,D,E,F 这六个数组中的任何一个,这显然是一个矛盾!故题中结论成立。

[例 3-51] (第 24 届莫斯科竞赛试题)在边长为 20 和 25 的矩形中放置着 120 个边长为 1 的正方形。求证:在矩形中可作一个直径为 1 的圆与这 120 个正方形没有公共点。

证明:当且仅当直径为 1 的圆的中心 P 与边长为 1 的正

方形 $ABCD$ 的一边距离不大于$\frac{1}{2}$时，这两个图形有公共点。因此，P 点不属于由正方形 $ABCD$ 及四个尺寸为 $1\times\frac{1}{2}$的矩形以及 4 个半径为$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{4}$圆所组成的图形 $A'B'B''C''C'D'D''A''$之中(如图 3.25)。这个图形面积等于 $1+4\cdot1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=3+\frac{\pi}{4}$。

如果对 120 个已知正方形各作一个图 3.25 那种形状的图形，并用 F_1 表示这 120 个图形的并集的面积，因为这 120 个图形有些可能互相重叠，所以 $F_1\leq120\cdot\left(3+\frac{\pi}{4}\right)=360+30\pi$。

图 3.25

对于圆心在已知矩形内，直径为 1 的圆，当且仅当它不完全含在矩形内部时，其中心与矩形边的距离小于$\frac{1}{2}$。矩形中与矩形边的距离小于$\frac{1}{2}$的点组成面积为 $20\cdot25-19\cdot24=44$ 的图形 F_2(如图 3.26)。

因为 F_1 与 F_2 的面积之和 $360+30\pi+44<500$，而已知矩形面积等于 $20\times25=500$，所以由重叠原理知存在一点 P 属于已知矩形但不属于图形 F_1，也不属于图形 F_2。因此中心在 P，直径为 1 的圆完全含在已知矩形中而且和 120 个已知

图　3.26

正方形设有公共点。得证。

(2) 第二型抽屉原理

分析第一型抽屉原理易见,我们注重的元素多的集合。第二型抽屉原理则相反,它注重元素最少的集合,这在解题中也是十分有用的。它可表达为定理3.4。

定理3.4　把 $mn-1$ 个元素分成 n 个集合,其中必有一个集合至多含有 $m-1$ 个元素。

下面看用第二型抽屉原理解题的例子。

[例 3-52]　(1984 年前苏联数学竞赛试题)甲乙二人为一个正方体的12条棱涂红和绿两种颜色、首先,甲任选三条棱并将它们涂上红色。然后,乙任选另外的三条棱并涂上绿色。接着甲再涂红三条棱,最后乙将余下的三条棱涂绿色。问甲能否采取适当策略将某一面的四条棱全部涂上红色?

解: 如图3.27将12条棱分成四组:

$\{A_1B_1, B_2B_3, A_3A_4\}$, $\{A_2B_2, B_3B_4, A_4A_1\}$

$\{A_3B_3, B_4B_1, A_1A_2\}$, $\{A_4B_4, B_1B_2, A_2A_3\}$。

无论甲第一次将哪三条棱涂红,由定理3.4知,四组中必有一

组的三条棱全未染红, 而乙只要将这组中的三条棱涂绿, 甲就再也无法将某一面的四条棱全部涂红了。

[例 3-53]　(1985 年保加利亚竞赛试题) 平面上给定 5 点, 其中任何 4 点中都有 3 点为一等边三角形的 3 个顶点, 求证: 5 点中必有 4 点为一个具有 60°角的菱形的 4 个顶点。

图　3.27

证明: 5 点共可构成 5 个不同的四点组, 每组中都有 3 点可构成一个正三角形, 故至少有 5 个正三角形(包括重复计数)。每个正三角形恰属于两个不同的四点组, 故知 5 点至少构成 3 个不同的正三角形。

3 个正三角形共有 9 个顶点。由定理 3.4 知, 5 点中必有一点至多为一个正三角形的顶点。将这个点去掉, 余下的 4 点中至少还有两个正三角形。显然, 这 4 点必为一菱形的 4 个顶点, 且其一内角为 60°。

象通常的第一型抽屉原理一样, 对于有些题目, 可以连续使用第二型抽屉原理。

[例 3-54]　(1987 年中国国家队集训队选拔题) 空间中给定 $2n(n\geq 2)$ 个点, 其中任何 4 点都不共面, 试证连接这些点的任何 n^2+1 条线段, 必可构成两个有公共边的三角形。

证明: 当 $n=2$ 时, $n^2+1=5$, 4 点间连有 5 条线段, 当然构成两个有一条公共边的三角形, 即命题于 $n=2$ 时成立。

设命题于 $n=k\geq 2$ 时成立。当 $n=k+1$ 时, $2k+2$ 个点之间连有 $(k+1)^2+1=k^2+2k+2$ 条线段, 这些线段的端点数

(包括重复计数)为

$$2(k^2+2k+2)=(2k+2)(k+1)+2$$

故由定理 3.4 知存在一点 A,由它引出的线段条数至多为 k + 1。除去 A 点,余下的 2k+1 点间的连线条数至少为

$$(k+1)^2+1-(k+1)=k(k+1)+1$$

如果多于这个数目,则再去掉多余条数的线段。这时,这些线段的端点数为

$$2k^2+2k+2=(2k+1)k+k+2<(2k+1)(k+1)$$

又由定理 3.4 知存在一点 B,由它引出的线段条数不超过 k。除去 B 点,余下的 2k 点间至少还有 k^2+1 条连线。于是由归纳假设即知结论成立。

[例 3-55] (第 29 届 IMO 预选题)试卷上共有 4 道选择题,每题有 3 个可供选择的答案。一群学生参加考试,结果是对于其中任何 3 人,都有一个题目的答案互不相同。问参加考试的学生最多有多少人?

解:设每题的三个选择支为 a, b, c,如果参加考试的学生有 10 人,则由定理 3.4 知,第一题答案分别为 a, b, c 的三组学生中,必有一组不超过 3 人。去掉这组学生,余下的学生中定出 7 人,则他们对第一题的答案只有两种。对于这 7 人关于第二题应用定理 3.4 知其中必可选出 5 人,他们关于前两题的答案都只有两种可能。对于这 5 人关于第三题应用定理 3.4,又知可选出 4 人,他们关于前三题的答案都只有两种。最后,对于这 4 个人关于第四题应用定理 3.4,知必可选出 3 人,他们关于四个题目的答案都只有两种,这不满足题中的要求。可见,所求的最多人数不超过 9。

表 3.1

题 \ 人	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	a	a	a	b	b	b	c	c	c
2	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	a	b	c	c	a	b	b	c	a
4	a	b	c	b	c	a	c	a	b

注：第二型抽屉原理的应用最早被南开大学的李成章教授所注意并提出。

另一方面，如果 9 个人的答案如表 3.1 所示，则每 3 人都至少有一个问题的答案互不相同。所以，所求的最多人数为 9。

2. 容斥原理

在组合计数时，常用到下面的容斥原理。

定理 3.5 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 m 个有限集合，集合 A_k 的元素个数记为 $|A_k|$ $(k=1, 2, \cdots, m)$，则

(i) $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{1\le i\le m}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le m}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$

(ii) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是集合 S 的 m 个子集合，则

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m| = |S| - \sum_{1\le i\le m}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^m|A_1\cap A_2\cdots\cap A_m|$$

定理 3.5 的证明及直观说明请读者参考组合数学的教材

和参考书,这里从略。

值得指出,定理 3.5 中的(i)式常称为容斥公式,(ii)式常称为筛法公式。从理论上讲,他们是完全等价的两个公式。在运用时,容斥公式常用来计算至少具有某几个性质之一的元素个数;而筛法公式则常用来计算不具有某几个性质中的任何一个的元素的个数。

[例 3-56] (1978 年奥地利-波兰竞赛试题)给定 1978 个集合,每个集合都恰含有 40 个元素,每两个集合都恰有一个公共元素。求这 1978 个集合的并集所含元素的个数。

解: 设 1978 个集合是 $A_1, A_2, \cdots, A_{1978}$。已知 $|A_i| = 40$, $i = 1, 2, \cdots, 1978$; $|A_i \cap A_j| = 1$, $1 \leq i, j \leq 1978$。欲求的是 $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{1978}|$,自然考虑用容斥原理为此需求出 $A_1, A_2, \cdots, A_{1978}$ 中若干个集合之交集所含元素的个数。

考虑集合 A_1,由条件,A_1 和其他 1977 个集合都相交。如果 A_1 的每个元素都至多属于 49 个集合,则和 A_1 相交的集合至多有 $40 \times 49 = 1960$ 个。这和 A_1 与其他 1977 个集合都相交矛盾。因此 A_1 中必有元素 a,它至少属于其他 50 个集合,设它们是 $A_3, \cdots, A_{51}$。设 B 是 $A_{52}, A_{53}, \cdots, A_{1978}$ 中的一个集合。设 a 不属于 B,由已知,B 和 $A_1, A_2, \cdots, A_{51}$ 中每一个都恰有一个公共元素,这些公共元素又不能是 a,因此这些公共元素两两不同,于是 B 至少含有 51 个元素,和 $|B| = 40$ 矛盾。所以 a 在 B 中。这说明 a 是 $A_1, A_2, \cdots, A_{1978}$ 的公共元素。由于每两个集合恰有一个公共元素,所以 $A_1, A_2, \cdots, A_{1978}$ 中任意个集合的公共元素都恰有一个,即为 a,因此

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 1978} |A_i \cap A_j \cap A_k| = C_{1978}^3$$

$$\sum_{1\le i<j<k<l\le 1978} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = C_{1978}^4$$

……

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_m<1978} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}| = C_{1978}^m$$

于是由容斥公式可得出给定的 1978 个集合的并集所含元素的个数为:

$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{1978}| = 40C_{1978}^1 - C_{1978}^2 + C_{1978}^3 - C_{1978}^4 + \cdots + (-1)^{1977}C_{1978}^{1978} = 39\times 1978 + 1 - [1 - C_{1978}^1 + C_{1978}^2 - \cdots + (-1)^{1978}C_{1978}^{1978}] = 39\times 1978 + 1 - 0 = 77143$

[例 3-57] (匈牙利竞赛试题)由数字 1, 2 和 3 组成 n 位数, 要求 n 位数中 1, 2 和 3 的每一个至少出现一次, 求所有这种 n 位数的个数。

解: 由数字 1, 2 和 3 组成的 n 位数全体构成的集合为 S, 很显然 $|S| = 3^n$。S 中所有不含 1 的 n 位数的集合记为 A_1, A_2 和 A_3 与 A_1 代表同样的含义, 于是 A_i 是 S 中所有含有数字 i 的 n 位数的集合, i= 1, 2, 3。因此 $A_i \cap A_2 \cap A_3$, 即是 S 中同时含有数字 1, 2 和 3 的 n 位数的全体构成的集合。要求的就是 $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$。

由于 A_i 是 S 中所有不含数字 i 的 n 位数集合, 因此 $|A_i| = 2^n (i= 1, 2, 3)$, 而 $A_i \cap A_j$ 是所有不含数字 i 和 j 的 n 位数的集合, 所以 $|A_i \cap A_j| = 1 (1 \le i < j \le 3)$, 显然 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 =$, 于是根据筛法公式可得符合题目要求的 n 位数的个数为:

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^n - 3\times 2^n + 3$。

[例 3-58] (第 18 届波兰数学竞赛试题)某人给 6 个不

同的人写了 6 份信, 每人一份, 并准备了 6 个写有收信人的地址的信封。问有多少种投放信笺的方法, 使得每份信笺和信封上的收信人都不相符?

解: 设 6 个人是 1, 2, …, 6。将 6 份信笺放进 6 个信封内, 每个信封放入一份信笺, 所有放法的集合记作 S, 很明显, $|S| = 6!$。将写给第 i 个人的信放进写有第 i 个人的地址的信封, 其他 5 份信笺放进 5 个信封的所有放法集合记为 A_i, $i = 1, 2, \cdots, 6$。很明显, A_i 是 S 的子集, 并且 $|A_i| = 5!$。而所求的放法总数为 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_6}|$。

再注意到 $|A_i \cap A_j| = 4!$ $(1 \leq i < j \leq 6)$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 3!$ $(1 \leq i < j < k \leq 6)$, $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 2!$ $(1 \leq i < j < k < l \leq 6)$, $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m| = 1!$ $(1 \leq i < j < k < l < m \leq 6)$ $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_6| = 1$, 于是由容斥原理(筛法公式)得投放信笺的方法种数为:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_6}| = 6! - 6 \times 5! + C_6^2 \times 4! - C_6^3 \times 3! + C_6^4 \times 2! - C_6^5 \times 1! + 1 = 265。$$

[例 3-59]　(1973 年奥地利竞赛试题)给定 $2n$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$, $n > 1$。任意三点不共线, 设 M 是以给定的点为端点的线段构成的集合, $|M| \geq n^2 + 1$。证明: 存在以 A_r, A_s, A_t 为顶点且边在 M 中的三角形。还证明: 如果 M 中元素个数不超过 n^2, 则结论不再成立。

注: 例 3-59 的一个推广即为例 3-54, 这里再解例 3-59 以突出容斥原理的应用。

证明: 对于第一问, 我们用数学归纳法。

当 $n = 2$ 时结论显然真;

假设命题对 $n = k$ 时成立, 即对 $2k$ 个点, 它们之间至少有

k^2+1条线段相连,则至少构成一个三角形。下面证明,当 $n=k+1$ 时,即对 $2\cdot(k+1)$ 个点,如果它们之间至少有 $(k+1)^2+1$ 条线段连结,则至少构成一个三角形。

设在这 $2n=2(k+1)$ 个点中,A,B 有线段相连,记 $Z=\{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+2}\}$

$S=\{P|P$ 与 A 有线段相连,$P\in Z\}\backslash\{B\}$

$T=\{P|P$ 与 B 有线段相连,$P\in Z\}\backslash\{A\}$

显然,我们有 $|Z\backslash\{A,B\}|=2k$。集合 $Z\backslash\{A,B\}$ 中线段的条数分为以下两种情况。

① $Z\backslash\{A,B\}$ 中至少有 k^2+1 条线段,则由归纳假设,至少存在一个三角形。

② 设 $Z\backslash\{A,B\}$ 中至多有 k^2 条线段。由于 $|Z|=2k+2$,故 $|S\cup T|\leq 2K$。又 $|S|+|T|\geq 2k+1$,由容斥公式得

$$|S\cap T|=|S|+|T|-|S\cup T|\geq 2k+1-2k=1$$

即 $S\cap T\neq$,故在 $S\cap T$ 之中至少存在一点 C,则 A,B,C 之间有线段相连,构成一个△ABC。

对于第二问,我们可将这 $2n$ 个点分为两个集合 S 与 T,使每个各含 n 个点。若 S 的每一点与 T 的每一点相连,则恰有 n^2 条线段,而不可能形成三角形。证毕。

[例 3-60] (第四届冬令营试题)设 S 是复平面上的单位圆周(即模等于 1 的复数的集合),f 是从 S 到 S 的映射。对于任何 $z\in S$,定义

$$f^{(1)}(z)=f(z),\quad f^{(2)}(z)=f(f(z)),\cdots$$

$$f^{(k)}(z)=\underbrace{f(f(\cdots(f}_{k\text{个}f}(z)))$$

如果 $c\in S$ 及自然数 n 使得

$$f^{(1)}(c)\neq c, f^{(2)}(c)\neq c, \cdots, f^{(n-1)}(c)\neq c, f^{(n)}(c)=c$$

那么我们就说 c 是 f 的 n—周期点。

设 m 是大于 1 的自然数, f 定义为:

$$f(z)=z^{m}(z\in S)$$

试计算 f 的 1989—周期点的总数。

解: 由 $f(z)=z^{m}$, 用归纳法易知 $f^{(n)}(z)=z^{m^{n}}(n=1,2,3,\cdots)$。

对于自然数 n, 记 $B_n=\{z|f^{(n)}(z)=z, z\in S\}$。由于 B_n 是 1 的 m^n-1 次根的全体所成之集, 所以 $|B_n|=m^n-1$。

对于自然数 k 及 $z\in B_k$, 易见对于自然数 r, $f^{(rk)}(z)=f^{((r-1)k)}(f^{(k)}(z))=f^{((r-1)k)}(z)=\cdots=f^{(k)}(z)=z$ 所以当 k, n 为自然数且 $k|n$ 时, $B_k\subseteq B_n$。

又如果 k, n 为自然数, $n=rk+j(1\leq j\leq k-1)$, 且 $z\in B_k$, $f^{(n)}(z)=f^{(j)}(f^{(rk)}(z))=f^{(j)}(z)$, 所以, 如果 $z\in B_k\cap B_n$, 则由上式得 $z\in B_j$。用辗转相除法, 即知 $B_k\cap B_n\subseteq B_{(k,n)}$($(k,n)$ 表示 k 和 n 的最大公约数)。

把上面的结论合并起来, 即得

$$B_k\cap B_n=B_{(k,n)}$$

由定义, $\{f$ 的 1989—周期点全体$\}=B_{1989}\backslash\bigcup_{k=1}^{1988}B_k$ 因此, 它等于

$$B_{1989}\backslash\bigcup_{k=1}^{1988}(B_{1989}\cap B_k)=B_{1989}\backslash(\bigcup B_t)$$

(此处 $t\in T=\{t|t$ 整除 $1989, t<1989\}$)

由于 $1989=3^2\cdot 221=3^2\cdot 13\cdot 17$, 1989 的真约数必是 $663(=3\cdot 13\cdot 17)$, $153(=3^2\cdot 17)$, $117(=3^2\cdot 13)$ 这三个数中(至少)一个的约数, 所以

{f 的 1989—周期点全体}$= B_{1989} \setminus (B_{663} \cup B_{153} \cup B_{117})$

由容斥原理

$$|B_{663} \cup B_{153} \cup B_{117}| = |B_{663}| + |B_{153}| + |B_{117}| - |B_{663} \cap B_{153}| - |B_{663} \cap B_{117}| - |B_{153} \cap B_{117}| + |B_{663} \cap B_{153} \cap B_{117}| = |B_{663}| + |B_{153}| + |B_{117}| - |B_{51}| - |B_{39}| - |B_{9}| + |B_{3}|$$

于是 f 的 1989—周期点的总数为

$$m^{1989} - m^{663} - m^{153} - m^{117} + m^{51} + m^{39} + m^{9} - m^{3}$$

3．富比尼原理

富比尼原理也叫算两次原理，它可通俗地陈述为：

采用两种不同的方法来计算一个总体(通常是有限或有界集合)，所得的结果相同。

没有什么比这种陈述更显而易见的，甚至它还经常被我们有意无意地应用于日常生活中(如先按行、再按列核准一个教室里的人数)。然而出人意外的是，正是这简单的陈述，却是我们发现和证明组合等式，进行组合计算的强有力手段。

[例 3-61]　求证：$\sum_{k=1}^{n} C_n^k C_k^p = C_n^p 2^{n-p}$

证明：我们用两种方法来计算：“从 n 个人中选取若干个人组成学习小组(人数至少为 p)，再在这些人中选定 p 个人负责”这一事件的选法总数。

一方面，小组人数可以分别为 $p, p+1, \cdots, n$，对于人数为 k 的小组有 $C_n^k C_k^p$ 种选取方法，而 k 可取 $p, p+1, \cdots, n$，故所有小组共有

$$C_n^p C_p^p + C_n^{p+1} C_{p+1}^p + \cdots + C_n^n C_n^p$$

种选法。

另一方面,我们可以先从 n 个人中选 p 个人负责,有 C_n^p 种选法,其余 $n-p$ 个人可以参加小组或不参加小组,每个人都有两种选择,共有 2^{n-p} 种选择,故这样的小组共有 $C_n^p 2^{n-p}$ 种选法。

由富比尼原理,便知等式成立。

[例 3-62] 求证: $1^2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+n^2C_n^n=n(n+1)2^{n-2}$

证明: 我们用两种方法来计算:"从 n 个人中选取任意多个人组成学习小组,再在学习小组中安排正、副组长各一名(可由一人兼任)"这一事件的方法总数。

一方面,如果选 k 个人组成小组,则有 C_n^k 种选法,再在 k 人中选一人当组长,有 k 种选法,由于可以兼任,副组长亦有 k 种选法,故这样的小组共有 $k^2C_n^k$ 种选法。又 k 可取 $1, 2, \cdots, n$,从而所有的小组共有 $1^2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+n^2C_n^n$ 种取法。

另一方面,我们先将正、副组长选好:如果正、副组长由一人兼任,则有 C_n^1 种取法,而其余 $n-1$ 人可以参加或不参加小组,有 2^{n-1} 种选择,所以这样的小组有 $2^{n-1}C_n^1$ 种选法;如果正、副组长由不同的两人担任,则有 $C_n^2\cdot 2!$ 种选法,其余 $n-2$ 个人有 2^{n-2} 种选择,此时的小组有 $2^{n-2}\cdot C_n^2\cdot 2!$ 种选法。故所有的小组共有 $2^{n-1}C_n^1+2^{n-2}\cdot C_n^2\cdot 2!=n(n+1)2^{n-2}$ 种取法。

由富比尼原理,题中等式成立。

象上面两例一样,大量组合恒等式的论证,其证法的主要关键是应用富比尼原理(这种方法,实际上我们在高中教材中就已大量采用;只是未采用此种说法)。即用两种不同的方法计算一个集合,然后建立彼此相等的表达式。

[例 3-63] (第 23 届莫斯科竞赛试题) 平面上有 m 个点,某些点之间用线段连接,每个点都和 l 个点连有线段,试

问: l 可以取怎样的值?

解: 设给定的 m 个点的集合为 $A=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$, 并设 A 中点之间有 n 条线段。现用两种方法来计算有序点对的集合 $S=\{(A_i, A_j) | A_i, A_j \in A, A_i$ 与 A_j 有线段相连$\}$的元素个数。

一方面, 显然每一条线段都对应着 S 中的两个有序点对, 因此 $|S|=2n$。

另一方面, 由题设以 $A_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 为端点的连线有 l 条, 这说明 S 中第一个坐标为 A_i 的有序点对有 l 个, 故 S 中的所有有序点对为 ml 个, 亦即 $|S|=ml$。

于是, 由富比尼原理有 $ml=2n$。又由题设, 每个点都与 l 个点有线段相连, 因此, $l\leq m-1$, 即 $l<m$。这表明 l 应满足两个条件, 即 $l<m$, 且 ml 为偶数。

[例 3-64] (第 2 届全俄竞赛试题) 在 $n\times n$(n 为奇数) 的方格表里的每一个方格中, 任意填上一个 $+1$ 或 -1, 在每一列的下面写上该列所有数的乘积, 在每行的右边写上该行所有数的乘积。证明: 这 $2n$ 个乘积的和不等于 0。

证明: 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是各行的乘积, $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是各列的乘积, 则由富比尼原理知表中所有的乘积 $p_1p_2\cdots p_n=q_1q_2\cdots q_n$。这个等式说明在 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 和 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 中有偶数个 -1, 即在全部 $2n$ 个数 $p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_n$ 中有偶数个 -1, 同样有偶数个 $+1$。

设有 $2k_1$ 个 -1, $2k_2$ 个 $+1$, 则 $2k_1+2k_2=2n$, 即 $k_1+k_2=n$。因为 n 为奇数, 所以 $k_1\neq k_2$, 即 $2k_1\neq 2k_2$, 故 $p_1+p_2+\cdots+p_n+q_1+q_2+\cdots+q_n$ 不等于 0。

有时, 对一个总体进行两种计数时, 其中一种只能是用不

等式进行估计，于是由富比尼定理便得到了一个关于总体的不等式，这还常常用来解决离散变量的最值问题。

[例 3-65]　(第 23 届莫斯科竞赛试题) 平面上有 n 个点，其中任意三点都可形成一个直角三角形，求 n 的最大值。

解：设 n 个点的集合为 A，由题设，A 中任意三点都确定一个直角三角形，所有这种直角三角形的集合记作 B，显然 $|B|=C_n^3$。

另一方面，根据直角三角形直角顶点的计算来估计 $|B|$：对于 A 中的点 A_1，A_1 至多是 B 中一个直角三角形的直角顶点，若不然设 A_1 是直角三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 与直角 $\triangle A_1A_2A_3'$ 的直角顶点。延长 $\triangle A_1A_2A_3$ 的两条直角边，它们把平面分成四个区域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ与Ⅳ，不妨设直角 $\triangle A_1A_2A_3'$ 的直角边 A_1A_3' 的延长线落在区域Ⅰ与Ⅲ中(如图 3.28)，如果点 A_2 在区域Ⅱ中，则 $\triangle A_1A_2A_3'$ 是钝角三角形，与题设矛盾；如果点 A_2 在区域Ⅲ中，则 $\triangle AA_2A_2'$ 为钝角三角形，矛盾。由于 A 中任一点至多是 B 中一个直角三角形的直角顶点，因此 $|B|\leq n$。

这样，由富比尼原理得 $n\geq C_n^3$，由此得到 $n\leq 4$。图 3.29 表明，上界 4 是可以达到的，因此，所求的最大值为 4。

[例 3-66]　(1991 年冬令营试题) 地面上有 10 只小鸟在啄食，其中任意 5 只鸟中至少有 4 只在一个圆周上，问有鸟最多的一个圆周上最少有几只鸟？

解：(Ⅰ) 先证有鸟最多的圆周上有 5 只或 5 只以上的鸟。显然 10 只鸟含有 $C_{10}^5=252$ 个五鸟组。另一方面，因为每个共圆四鸟组含于 6 个五鸟组之中。设总共有 x 个共圆四鸟组，则总共含有 $6x$ 个五鸟组(某些五鸟组可能被重复计数)。这 $6x$ 个五鸟组囊括了一切可能的五鸟组(因为每个五鸟组

图　3.28　　　　　　图　3.29

至少含有一个共圆的四鸟组)。于是由富氏原理有 $6X \geq C_{60}^{5}$, 所以 $X \geq 42$。

再来考察三鸟组。10 只鸟总共决定了 $C_{10}^{3} = 120$ 个三鸟组。而 42 个共圆四鸟组总共包含了 $42 \times 4 = 168$ 个三鸟组。因此, 至少有两个不同的共圆四鸟组包含了同一个三鸟组。这说明至少有 5 只鸟在同一圆周上。

(Ⅱ) 设 S 是有鸟最多的一个圆周, 下证至多只能有一只鸟不在 S 上。事实上, 由(Ⅰ)知 S 上至少有 5 只鸟 A, B, C, D, E。假设有两只鸟 U 和 V 不在 S 上, 则 A, B, C 三只鸟中有两只不妨设为 A, B 与 U 和 V 在同一圆周上, 并且 C, D, E 三只鸟中也有两只; 不妨设为 C, D 与 U 和 V 在同一圆周上。再来考察 A, C, E, U, V 这 5 只鸟就会发现: 这 5 只鸟中任何 4 只都不能落在同一圆周上(否则 U 与 V 之一要落到 S 上), 矛盾。这说明不在 S 上的鸟至多只能有 1 只。

综合所述, 我们得到结论: 有鸟最多的圆周上至少有 9 只鸟。

［例 3-67］ (第 30 届 IMO 试题) 设 n 和 k 是正整数, S 是平面上 n 个点的集合, 满足(i) S 中任何三点不共线; (ii) 对 S 中的每一点 p, S 中存在 k 个点与 p 的距离相等。求证: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$。

证明: 考察以 S 中任意两点为端点的线段。一方面, 这种线段共有 C_n^2 条。另一方面, 对每点 $A_i \in S$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 有一个以 A_i 为圆心的圆, 其上至少有 S 的 k 个点。从而这个圆至少有 C_k^2 条弦, 它们的端点都在 S 中。n 个圆共有 nC_k^2 条这样的弦, 而每两个圆至多有一条公共弦, 所以端点属于 S 的线段至少有 $nC_k^2 - C_n^2$ 条。于是有

$$C_n^2 \geq nC_k^2 - C_n^2$$

化简得 $k^2 - k - 2(n-1) \leq 0$

解得 $-\frac{1}{2} - \sqrt{2n - \frac{7}{4}} \leq k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$, 得证。

习 题 3.4

1. 平面上任意给定六个点(它们之中无三点共线), 证明: 总能找到三点, 使得这三点为顶点的三角形的内角中有不超过 $30°$ 的角(第 26 届莫斯科竞赛试题)。

2. 任给 7 个实数, 证明其中有两个数 x、y 满足 $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$。

3. 把 1 到 10 的自然数摆成一个圆圈。证明一定存在三个相邻的数, 它们的和大于 17。

4. 在小于 1000 的正整数中, 既不能被 5 整除也不能被 7 整除的数有多少个?

5．给定 1987 个集合，每个集合都恰有 45 个元素，每两个集合的并集都恰有 89 个元素。求这 1987 个集合的并集所含元素的个数。

6．5 个人玩骨牌，每次总是两个人对两个人，每个人都想和其他四人中每一人合作玩一轮，即打对家两次，试问他们共需玩多少轮？请给出一种方案。(第 18 届莫斯科竞赛试题)

7．试问在周长为 1956 的圆周上最少需要取多少个点，才能使得对其中每个点，都恰有一个距离为 1 的点，也恰有一个距离为 2 的点？这里距离按弧长计算(第 19 届莫斯科竞赛试题)。

8．给定平面上几个相异点。证明其中距离为单位长的点对少于 $2n^{\frac{3}{2}}$ 对。(第 39 届普特南竞赛试题)。

3.5　解对策问题的策略

对于某些游戏活动，在遵循一定规则的前提下，采取怎样的策略，可获得最佳效果，或战胜对手，这类问题我们称为对策问题。在国内外数学竞赛中，对策问题越来越受重视，这类问题常以游戏活动表述，不但趣味性强，而且解题方法与技巧独特，灵活。下面通过若干实例介绍解对策问题的一些策略。

1．分析数量特征

涉及数量的有关对策问题(主要是双人“对奕”)，可根据题设条件，比赛规则，充分挖掘数量关系特征，这可分析最后一步获胜的数量特征(临胜态)，也可先取一些具体或简单数量进行试验，找出“临胜态”。在找出“临胜态”之后，可采取“互补”的策略，即在对手执步后，采取互补办法，造成新的“临胜态”。

[例 3-68]　(1989 年原列宁格勒竞赛试题)两人进行游

戏。在黑板上写着数字 2。两人轮流将黑板上所写的数字 n 改为 n+ d, 其中 d 是 n 的任意一个小于自身的正约数。当某人所写出的数大于 19891989 时, 即判他输。试问, 他们谁能取胜——是先开头的, 还是其对手?他要获胜, 应采取怎样的策略?

分析: 注意到 19891989 是个奇数。不改变问题的本质, 我们将其换成较小的奇数, 如 5, 7, 通过试验, 便可发现先开头的取胜。于是猜测本问题将是先开头的取胜。

解: 先开头的甲取胜。他可采取如下的策略: 首先他将黑板上的 2 加 1, 即在黑板上写上数字 3。由于小于奇数 3 的正约数只能是奇数 1, 因此第二人乙只能在黑板上写上偶数 4。以后同样甲每次都将黑板上的数加 1, 因此他写在黑板上的都是奇数, 相反地, 乙每次都只能将黑板上的奇数再加上一个奇数(奇约数), 因此每次写出的必然是偶数。这样一来, 必然是轮到第一人甲写出数字 19891989, 因而取胜。

[例 3-69]　甲乙两人轮流从 n 枚棋子中取走 p^k(p 为素数, $k= 0, 1$) 枚(甲先取, 乙后取), 取到最后一枚棋子者为胜, 问甲、乙两人谁能必胜? 他要获胜, 应采取怎样的策略?

分析: 取 n 的一些具体值试验, 不难得到: n= 1, 2, 3 时甲胜, n= 4 时乙胜; 而 n> 4 时, 若 n 是 4 的倍数时乙胜, 否则甲胜。

解: 由分析, 当 n= 4k+ r, r= 1, 2, 3 时, 由于 r 是素数, 甲第一步可取 r 枚棋子, 以后乙取素数枚, 可设为 4t+ 1 或 4t+ 3 枚棋子, 这时甲就相应地取 3 或 1 枚棋子, 即每次甲取过之后, 都要使余下的棋子数总是 4 的倍数。经过若干步后, 最后还剩 4 枚棋子, 且接下来乙取素数枚(1 或 2 或 3), 甲便可取到最后一枚棋子, 所以甲胜。

当 $n=4k+4$ 时,无论甲第一步怎样取,剩下的棋子数总不是 4 的倍数,以后乙只要采取与甲同的策略,乙必胜。

(在此例中,由于 p^k(p 为素数,$k=0, 1$)的取值中可取 1, 2, 3, 5, …,首先取不到的是 4。因此数量 4 是此问题中蕴含的数量特征。)

[例 3-70]　(1989 年原列宁格勒竞赛试题) 黑板上写着数字 1000,桌上放着一堆火柴,刚好为 1000 根。两人轮流进行游戏,轮到的一方可从堆中取出不多于 5 根火柴,也可往堆中放入不多于 5 根火柴(但开始时两人手中均无火柴),并在黑板上写下此时堆中的火柴数目。如果某人所写下的数字是黑板上已经有过的,即判他输。试问,如果双方都采用正确的策略,谁将取胜——是先动作的,还是其对手?

解: 后动的人获胜。他可事先有意识地将整数从 0 到 999 按每相连的 8 个分为一组,共分为 125 组,然后按如下方式行事:当先动的人头一次写出某一组内的一个数时(这个数当然不可能是该组内的最小数),他就写出该组内所可能写出的最小数(此时,他相应地取出 3, 4 或 5 根火柴),并在心中将该组内其余 6 个数按这些数的递增顺序(也可其他要求)分成 3 对,每当先动的人写出其中的一个数时,他便回头写该数所在数对中的另一数(当将火柴放回堆中时,所写出的数只能仍然属于该组)。这样一来,对于先动的人的每一步行动,后动的人都有应对措施,因而他终将取胜。

[例 3-71]　(第 31 届莫斯科竞赛试题) 有两小堆糖果,两人进行游戏,他们轮流执步,执步者吃掉其中一小堆,而把另一堆分为(可相等也可不相等)两部分。如果另一堆中总共只有一块糖果而无法再分了,那么他就吃掉这一块而取胜。如

果开始时两小堆糖果分别有 33 块和 35 块。试问, 谁将取胜? 是先执步者还是其对手? 为了能取胜, 应当如何执步?

分析: 为了取胜的执步者须让对手最终把 2 块或 3 块糖果分成两堆。因此, 临胜态可记为(1, 1) 或(2, 1)。

解: 先执步者取胜。他在第一步中应吃掉有 33 块糖果的那一堆, 然后把另一堆分成 17 块、18 块两份, 在以后的过程中他始终应留给对手两堆数目皆为 $5k+2$ 或 $5k+3$ 的糖果(他能做到这一点)。这样一来, 他的对手最终不得不把 2 块或 3 块糖果分成两堆, 因而输掉。

[例 3-72] 有根数分别为 m, n 的两堆火柴, 两人轮流在任一堆(也仅在一堆) 中任取, 规定最后取得火柴者胜(败)、问谁有获胜策略? 策略是什么?

分析: 规定最后取得者获胜, 临胜态为$(i, 0)$ 或$(0, i)$, 让对方得平衡态为(i, i)。

略解: 若 $m \neq n$, 不管规定是最后取得者胜或败, 先取者均有获胜策略。若规定最后取得者胜, 先取者的策略是每次都使两堆剩下的根数相等。若规定最后取得者败, 先取者总可留下让对手有取的, 若 $m=n$ 时, 后取者均有获胜策略。

借助二进制, 分析获胜策略, 是十分有效的。

[例 3-73] 有根数分别为 m, n, l 的三堆火柴, 两人轮流在任一堆中(不可能同时从两堆或三堆中) 任取。规定取得最后火柴者胜。问谁有获胜的策略?

解: 将 m, n, l 分别用二进制表示, 若它们的各个数位上的数字(0 或 1) 之和为偶数, 则称(m, n, l) 为平衡态。

① 若一开始(m, n, l) 即为非平衡态, 则先取者一定有获胜策略。因他每次可取出若干个火柴, 使三堆火柴数达到和保

持平衡态(这是不难办到的),这时第二人无论怎样取,得到的总是非平衡态,所以他不可能取到最后一根。

② 若开始时(m, n, l)是平衡态,根据①,后取者一定有获胜策略。

作为特例,当 m = 1, n = 4, l = 8 时,这时(1, 4, 8) = (1, 100, 1000)为非平衡态,先取者有取胜策略,先取者从 8 根中取走 3 根使之成为平衡态(1, 4, 5) = (1, 100, 101)以后取法中也使取后成为平衡态,则先取者稳操胜券。

2. 利用图形的对称特征

在涉及图形的有关"对奕"问题中,要根据题设条件,比赛规则,充分利用图形的对称特征来解题。

[例 3-74] n 个负号排成一行,A, B 两人轮流(A 先 B 后)将负号改为正号,每次可改一个或相邻的两个。谁将最后剩下的负号改为正号他就是胜家,试为 A 设计出取胜的策略。

解: A 只要遵循下面的策略就可取胜: 如果 n 是奇数,他先将中间的一个负号改为正号;如果 n 是偶数,他先将中间的两个相邻的负号改为正号。然后,在 B 将某一侧的一个或两个负号改为正号时,A 就将另一侧的与 B 对称的一个或两个负号改为正号。

[例 3-75] (1969 年基辅竞赛试题)一个女孩与一个男孩挨次作正二十四边形的对角线,要求所画的这些对角线互不相交,谁画下最后一条这样的对角线谁就胜,女孩第一个开始画。问这女孩应当如何画才能得胜?

解: 正二十四边形是一个中心对称图形。因此女孩第一

步可引一条过 24 边形的对称中心的对角线(它存在,因 24 为偶数)。然后,在男孩引了任意一条对角线后,她只要引一条与男孩所引的那条对角线为中心对称的对角线即可。显然,在女孩做任一步后,已经引过的对角线的集合的元素两两对称。因为男孩在每步(如果它可能)都只能在 24 边形的(由第一条对角线分成的)两半中的一半中引对角线,所以女孩总有可能在另一半中引一条与之对称的对角线。由此可见,男孩不管如何画法,总不能引最后一条对角线,也就是说女孩得胜。

[例 3-76] (第 42 届莫斯科竞赛试题)柯尼亚和维佳在无穷大的方格纸上做游戏。自柯尼亚开始,他们依次在方格纸上标出结点,即纸上的铅垂直线和水平直线的交点,他们每标出一个结点,都应当使所有已标出的结点全部落在某一个凸多边形的顶点上(自柯尼亚的第二步算起)。如果谁不能再按法则进行下去,就判谁输。试问,按正常情况,谁能赢得这一游戏?

解:维佳总能获胜,她可以这样做:选定一个方格的中心作为对称中心,每次都将与柯尼亚所标的点相对称的点标出。容易看出,维佳总是有点可标(在维佳标 3 点之后,凸多边形仍然是凸的),在柯尼亚标了 6 点之后,就只能再在由六边形的各边及其两邻边的延长线所形成的 6 个三角形区域中标点,即是说,对柯尼亚来说,仅剩下有限个可标的点了。于是游戏必然在维佳对称地标出了柯尼亚的最后一步之后结束。

3. 分析位置特征

在涉及位置的有关对策问题中,要寻出获胜的策略,必须综合分析“临胜态”的位置关系。

[例 3-77] (第 14 届全俄罗斯竞赛试题) 二人在一张 8 × 8 的方格纸上做游戏。甲每次可将两个相邻(即有公共边)的小方格涂黑, 而乙则可将纸上任何一个小方格涂白(在游戏过程中, 同一个方格可被反复涂色多次) , 两人轮流涂色。一开始时, 所有方格都是白色的。如果乙能在自己的每一次涂色后都使得: (a) 每一个 5× 5 的矩形中都至少有一个角上的小方格保持为白色, 则判乙赢; (b) 要求在这些矩形中都至少有两个角上的小方格为白才算乙赢。试问乙有无获胜的可能。

解: (a) 乙有可能获胜。如图 3.30 所示, 我们将一部分小方格标上小圈。容易验证, 每一个 5 × 5 的矩形中都至少有一个角上的小方格是属于这种被标上了小圈的小方格。如果乙能在他自己每次涂色后保持这些标了小圈的方格都是白色, 那么他就可以取胜, 而要做到这一点是可能的, 因为甲每次不可能同时涂黑这些带圈的方格中的两个。

图 3.30

(b) 乙不可能获胜。因为图中共有 16 个 5× 5 矩形, 而任何一个小方格都不可能同时是两个不同的 5× 5 矩形的角上的方格。因此, 乙要想获胜, 他就必须在每次涂色后至少应保证图中不少于 32 个白色小方格, 而甲却可以干扰他的这一目标的实现。事实上, 甲可以在前 32 次涂色中涂遍所有 64 个方格, 使每一个小方格都被涂黑过 1 次。而乙在相应的 32 次涂色中至多能使 32 个小方格恢复为白色。如果在此之后, 图中有某两个白色方格相邻, 则甲即可在第 33 次涂色中同时涂黑

它们, 于是仅剩下 30 个白色方格。而乙在作了第 33 次涂色后, 白色方格也至多有 31 个, 此时乙即已失败。而如果在第 32 次涂色之后图中没有相邻的白色小方格, 则图中的黑色和白色方格的分布恰如国际象棋棋盘之状, 这也就意味着在某些 5×5 矩形中角上的小方格全是黑色的, 乙显然也是失败的。

[例 3-78] (第 12 届前苏联奥林匹克试题) 一个棋子放在国际象棋棋盘的一个角上, 象棋盘的大小为 $n\times n$ 个方格。两个游戏者按次序向邻近的方格(和放棋子的方格具有公共边) 移动棋子, 第二回移动方向可以任意选择, 但棋子已经走过的地方不能再走, 最后谁没处走算败。

(a) 证明: 如果 n 是偶数, 那么开始走的人能获胜; 而 n 是奇数时, 则第二人获胜。

(b) 如果最初棋子没有放到棋盘的角上, 而是放在和它邻近的方格内。问谁能最后获胜?

解: (a) 如果 n 是偶数, 那么可以把整个棋盘分成 $\frac{n}{2}$ 个大小为 1×2 个方格的矩形。第一个人开始走总是可行的, 如果第一人随之采取如下战略就一定能获胜: 不管第二人如何走法, 第一人移动棋子时, 总是保持和棋子原在方格处于同一 1×2 的矩形内。如果 n 是奇数, 那么除开始的角外, 仍能把棋盘分成一些 1×2 的矩形, 类似于上面的策略, 第二人就能保证获胜。

(b) 总是第一个走棋的人能获胜。如果 n 是偶数, 就类似于(a)的情况操作; 当 n 为奇数时, 除一个角以外, 将棋盘的方格分出用颜色涂过的方格。容易验证, 在角上的方格, 第二个

人无论如何都不能取胜，因而第一个游戏者只用跟着走的策略就能获胜。

习　题　3.5

1．甲、乙两人轮流从 n 根火柴中任取不超过 $p(1<p<n)$ 根，(i) 规定取得最后火柴者胜，谁有获胜策略？(ii) 规定最后取得火柴者败，谁有获胜策略。

2．在 $m\times n$ 的象棋盘的右下格放一枚棋子，每步只能向左或者向左上对角线走一格，甲、乙两人轮流走，以先到左上格者为胜者，问谁必胜？怎样获胜？

3．8 个小圆分别涂了 4 种颜色：2 个红的，2 个蓝的，2 个白的，2 个黑的。两个游戏者轮流把圆放到立方体的顶点上，在所有的圆都放到立方体的各个顶点上去后，如果对立方体的每一顶点都能找到一条过此顶点的棱，其端点上的圆同色，则第一个放圆的人获胜，否则第二个放圆的人获胜。问谁必胜？

3.6　几何变换在解竞赛题中的应用

几何变换思想在现代几何学的理论和应用上都发挥着巨大的作用。在数学竞赛中，很多的几何试题都含有几何变换的思想。不少竞赛题，应用几何变换的思想进行处理，可以化繁为简，迅速找到解题思路。常见的初等几何变换有反射，平移，旋转，中心对称，位似，位似旋转等等。下面分别予以介绍。

1．反射变换

把一个图形 F 变到它关于直线 l 的轴对称图形 F'，这样的变换叫做关于直线 l 的反射变换。

[**例 3-79**] (**第 24 届 IMO 试题**) **已知** A **为平面上两半径不等的**⊙O_1 **和**⊙O_2 **的一个交点，外公切线** P_1P_2 **的切点为** P_1, P_2, **另一条外公切线的切点为** Q_1, Q_2, M_1, M_2 **分别为** P_1Q_1, P_2Q_2 **的中点。求证**: $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$。

图 3.31

证明: **如图** 3.31, **由于图形关于直线** O_1O_2 **成对称，故** P_1Q_1, P_2Q_2 **以及公共弦** AB **均垂直于** O_1O_2, **故** M_1, M_2 **在** O_1O_2 **上，又由外公切线的性质，易证**$\triangle P_1O_1M_1 \backsim \triangle P_2O_2M_2$。**设两圆公共弦交** P_1P_2 **于** C, **则** $P_1C^2 = CA \cdot CB = CP_2^2$。**即** $P_1C = CP_2$, **所以** AB **平分** M_1M_2。

现以 AB **为反射轴将**$\triangle O_2AM_2$ **反射到**$\triangle O_2'AM_1$, **则** O_2' **在** O_1O_2 **上且** $AO_2 = AO_2'$, $\angle O_2'AM_1 = \angle O_2AM_2$。

$$\because \frac{AO_1}{O_1M} = \frac{P_1O_1}{O_1M_1} = \frac{P_2O_2}{O_2M_2} = \frac{AO_2}{O_2M_2} = \frac{AO_2'}{O_2'M_1}$$

$\therefore AM_1$ **平分**$\angle O_1AO_2'$

$\therefore \angle O_1AM_1 = \angle O_2'AM_1 = \angle O_2AM_2$

$\therefore \angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$, 得证

注: 在例 3-79 中, 利用反射将两角 $\angle O_1AM_2$ 与 $\angle O_2AM_2$ 集中到一个三角形内, 条件集中, 从而使问题得以顺利解决。

[例 3-80] 求证: 直角三角形的内接三角形的周长不小于斜边上的高的两倍。

证明: 如图 3.32, 设在直角 $\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的高, $\triangle PQR$ 是它的任一内接三角形, 将 Rt$\triangle ABC$ 以 BC 为对称轴, 反射为 $\triangle BCE$, 再将 $\triangle BCE$ 以 CE 为对称轴反射为 $\triangle CEF$。此时 $\triangle PQR$ 为 $\triangle TUV$, 延长 DC 交 EF 于 G, 于是 $EF \parallel AB$, $CG = CD$。所以 DG 是两平行直线 AB 与 EF 之间

图 3.32

的距离。因而

$$PQ + QR + RP = PQ + QV + VT \geq GD = 2CD$$

故内接 $\triangle PQR$ 的周长不小于斜边上高的两倍。

2. 平移变换

把图形 F 上的所有点都按一定方向移动一定距离形成图形 F′,则由 F 到 F′ 的变换叫做平移变换,简称平移。

[例 3-81]　等边三角形的三条边上,有三条相等的线段 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2。证明: 直线 B_2C_1, C_2A_1, A_3B_1 所成的三角形中,三条线段 B_2C_1, C_2A_1, A_3B_1 与包含它们的边成比例。

证明: 如图 3.33,将 C_1C_2 平移到 B_2P,连结 PA_1, PB_1, PC_2。因为 $B_2C_1C_2P$ 为平行四边形,所以 $B_2P = C_1C_2 = B_1B_2$,故 $\triangle B_1B_2P$ 为等边三角形,B_1P 礅 A_1A_2,这样就得 $A_1A_2B_1P$ 为平行四边形,所以 A_1P 礅 A_2B_1。因此由 B_2C_1, C_2A_1, A_2B_1 这三条线段构成的三角形与 $\triangle A_1PC_2$ 全等,而 $\triangle A_1PC_2 \backsim \triangle A_3B_3C_3$,从而命题得证。

图　3.33

注: 例 3-81 利用平移确定 P 点,勾联了已知条件之间的联系,使辅助线的添加变得自然。

[例 3-82]　(第 21 届 IMO 预选题)是否任意一个正 2n 边形都可以分解为若干个菱形?

解: 我们证明一个更广的结论: 即任意一个等边 2n 边形当它的各对对边平行时都可以分解成为若干个菱形。

当 $n = 2$ 时,因为等边四边形本身就是菱形,结论成立。

设结论对某个 $n \geq 2$ 成立,并设等边 $2(n+1)$ 边形 $A_1A_2 \cdots A_{n+1}B_1B_2 \cdots B_{n+1}$ 满足所设的条件。设点 $C_1 = A_{n+1}$, C_2, …, C_n,

$C_{n+1}=A_1$ 是点 $B_1, B_2, \cdots, B_n, B_{n+1}$ 沿向量$\overline{B_{n+1}A_1}$的方向平移而得到的点(如图 3.34), 则

$$B_iC_i = B_{n+1}A_1 = B_iB_{i+1}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n。$$

由于所有 B_iC_i 是平行的, 所以四边形 $C_iB_iB_{i+1}C_{i+1}$ 都是菱形, 并且 $A_nC_1 = C_1C_2 = \cdots = C_nA_1$, $C_iC_{i+1} // B_iB_{i+1} // A_iA_{i+1}$, 因此 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_nC_1\cdots C_n$ 满足所设的条件。由归纳法假设, 它可以分解为菱形, 从而 $2(n+1)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}B_1B_2\cdots B_{n+1}$ 也可分解为菱形, 结论证毕。

图 3.34

3. 旋转变换

把图形 F 绕定点转动角度 α得到图形 F 的变换称为旋转变换。

[例 3-83] 半径相同, 圆心分别为 O 与 O 的两圆 C 和 C 相交于 A, B 两点。以 A 为圆心作圆 Γ, 它交圆 C 于 P、Q 两点; 交圆 C 于 P', Q' 两点, 试证: $\angle PAP' = \angle QAQ'$, 且其值与 Γ 的半径无关。

证明: 设 $\angle OAO' = \alpha$ 将圆 C, Γ 作以 A 点为中心, 转角为 α的旋转变换, 则 C 变为 C', Γ 变为 Γ。

如图 3.35 因为 P 是 C 与 Γ 的交点, 经旋转变换后, P 的像是 C 与 Γ 的交点即 P', 同样 Q 的象点为 Q'。

依旋转的性质, $\angle PAP' = \angle OAO' = \alpha$, 同样 $\angle QAQ' = \angle OAO' = \alpha$, 故 $\angle PAP' = \angle QAQ' = \alpha$ 证毕。

[例 3-84] 已知凸六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 中，$A_1A_2 = A_2A_3$，$A_3A_4 = A_4A_5$，$A_5A_6 = A_6A_1$，$\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 = \angle A_2 + \angle A_4 + \angle A_6$，证明：(i) $S_{\triangle A_2A_4A_6} = \frac{1}{2} S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$；(ii) $\angle A_6A_2A_4 = \frac{1}{2}\angle A_2$，$\angle A_2A_4A_6 = \frac{1}{2}\angle A_4$，$\angle A_2A_6A_4 = \frac{1}{2}\angle A_6$。

图 3.35

分析：欲证 $S_{\triangle A_2A_4A_6} = \frac{1}{2} \times S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$，只需证

$$S_{\triangle A_2A_4A_6} = S_{\triangle A_1A_2A_6} + S_{\triangle A_4A_5A_6} + S_{\triangle A_2A_3A_4} \quad (3\text{-}84\text{-}1)$$

将 $\triangle A_2A_3A_4$ 绕 A_2 点旋转，使 A_2A_3 与 A_2A_1 重合，得到 $\triangle A_2A_1A_4'$，如图 3.36 连结 $A_4'A_6$，因 $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 + \angle A_2 + \angle A_4 + \angle A_6 = 720°$，所以 $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 = 360°$。于是 $\angle A_4'A_1A_6 = 360° - \angle A_1 - \angle A_4'A_1A_2 = 360° - \angle A_1 - \angle A_3 = \angle A_5$，故有 $\triangle A_1A_4'A_6 \cong \triangle A_4A_5A_6$，这样 $S_{\triangle A_1A_4'A_6} = S_{\triangle A_1A_2A_6} + S_{\triangle A_2A_3A_4} + S_{\triangle A_4A_5A_6}$，于是要证(3-84-1)，只需证

图 3.36

$$S_{\triangle A_1A_4'A_6} = S_{\triangle A_2A_4A_6}$$

这是不难的，只要注意到 $\triangle A_1A_4'A_6 \cong \triangle A_2A_4A_6$ 便可，(i) 得证。

对于(ii)，因 $\angle A_6A_2A_4 = \angle A_6A_2A_4' = \angle A_1A_2A_6 + \angle A_3A_2A_4$，所以 $\angle A_6A_2A_4 = \frac{1}{2}\angle A_2$，同理可证另两个。

证明：略。

[例 3-85]　P 点为正方形 ABCD 内部且满足以下条件的点：(i) $PA < PB < PD < PC$；(ii) PA，PB，PC 的长成等差数列；(iii) PB，PD，PC 的长成等比数列。证明：这样的 P 点是唯一存在的。

证明：设 $PA = a$，$PB = b$，$PC = c$，$PD = d$，过 P 作 $XY \parallel BC$，作 $UV \parallel AB$，如图 3.37，则

$$PA^2 + PC^2 = PU^2 + PX^2 + PV^2 + PY^2 = PB^2 + PD^2$$

所以

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \tag{3-85-1}$$

由题意

$$a + c = 2b \tag{3-85-2}$$

$$d^2 = bc \tag{3-85-3}$$

将(3-85-3)，(3-85-2)依次代入(3-85-1)，得

$$a^2 + (2b - a)^2 = b^2 + b(2b - a),$$

即

$$(a - b)(2a - b) = 0$$

因 $a \neq b$，故 $b = 2a$，代入(3-85-2)，(3-85-3)得 $c = 3a$，$d = \sqrt{6}a$。

设正方形的边长为 l，把 $\triangle ABP$ 绕 B 点旋转，使 AB 与 BC 重合，得 $\triangle BCE$，如图 3.38，连 PE，显然 $\triangle PBE$ 为等腰直角三角形，$PE = 2\sqrt{2}a$，于是 $PE^2 + EC^2 = PC^2$，所以 $\angle PEC = 90°$，于是 $\angle APB = \angle BEC = 135°$。由余弦定理

图 3.37

图 3.38

$$l^2 = a^2 + 2a^2 + 2\cdot a\cdot 2a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $a = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}\cdot l$, 从而△PAB 是完全确定的, 也即 P 点是唯一存在的。证毕。

中心对称变换是旋转变换的一种特殊情形。这就是说, 关于中心 A 的对称就是绕中心 A 转 180°的旋转。利用中心对称变换, 可简捷地处理某些几何问题。

[例 3-86] (第 17 届前苏联奥林匹克试题) 在△ABC 中, 点 D 是 AB 的中点, E, F 分别在 AC, BC 上, 证明: △DEF 的面积不大于△ADE 与△BDF 的面积之和。

图 3.39

证明: 如图 3.39, 以 D 为中心将△ADE 中心对称变换

到△BDE′,则 E, D, E 共线且 ED= DE′,所以

$$S_{\triangle ADE} = S_{\triangle BDE'},\quad S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DE'F}$$

又四边形 BFDE 是凸四边形,所以

$$S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF} = S_{\text{四边形}BFDE'} > S_{\triangle DE'F} = S_{\triangle DEF}$$

[例 3-87]　(第 38 届美国普特南数学竞赛试题) 设 C 是平面内一条不自交的封闭曲线,又设 Q 是 C 内任一点,证明:在 C 上存在点 P_1 和 P_2,使得 Q 是线段 P_1P_2 的中点。

证明:如图 3.40,以 Q 为中心,将 C 中心对称变换到 C′,则 C 也是不自交的封闭曲线。

因 Q 点在 C 内,所以 Q 点也必在 C 内,于是 C 与 C 必相交。设 P_1 是 C 与 C 的交点。由 $P_1 \in C'$,所以必有一点 $P_2 \in C$,使得 P_2 在上述中心对称变换下变到 P_2,即 P_2, P_1 是一对对应点。所以 P_1, Q, P_2 共线且 $P_1Q = QP_2$,由于 P_1, P_2 均在 C 上,故结论成立。

图　3.40

4. 位似变换

把点 X 变作点 X 的具有下列性质的平面变换叫做位似: $\overline{OX} \doteq K\,\overline{OX}$(点 O 和数 K 是固定的)。点 O 称做位似中心,而数 K 称做位似系数。

如果两个图形在某个位似变换下,其中一个变作另一个,则这两个图形称做位似图形。

[例 3-88]　(第 22 届 IMO 试题) 已知三个等圆有一个公共点 O,并且都在一个已知三角形内,每一个圆与三角形的两

边相切，求证：这个三角形的内心，外心与点 O 三点共线。

证明：将三个等圆的圆心分别记为 A'，B'，C'。连结 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，则显然有 $A'B' /\!/ AB$，$B'C' /\!/ BC$，$C'A' /\!/ CA$，所以 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$。

连结 AA'，BB'，CC' 并延长，则此三线恰为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线，于是三线交于一点 O'。显然，O' 即是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的内心，又是两者的位似中心(如图 3.41)。

图 3.41

O 点作为三等圆的公共点，当然有 $OA' = OB' = OC'$，即 O 为 $\triangle A'B'C'$ 的外心。设 $\triangle ABC$ 的外心为 O''，则两个三角形的位似中心 O' 与二者各自的外心 O''，O 三点共线，即 $\triangle ABC$ 之内心，外心与 O 三点共线，证毕。

[例 3-89]　(第 23 届 IMO 试题) 已知 $\triangle A_1A_2A_3$ 不是等边三角形，它的三边分别为 a_1，a_2，a_3，其中 a_i 是 A_i 的对边，$i = 1, 2, 3$。M_i 是边 a_i 的中点，T_i 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆与 a_i 边的切点，S_i 是 T_i 关于 $\angle A_i$ 的平分线的对称点，求证：M_1S_1，M_2S_2，M_3S_3 三线共点。

证明：设 A_iB_i 是 $\angle A_i$ 的平分线，T_i 为内切圆与边 a_i 的切点，S_i 是 T_i 关于 A_iB_i 的对称点，$i = 1, 2, 3$(如图 3.42)。

由于 S_1，T_3 关于 A_1B_1 的对称点分别为 T_1，T_2 所以 $T_3S_1 = T_2T_1$。同理，考察以 A_2B_2 为轴的对称关系可得 $T_2T_1 =$

T_3S_2。从而有 $T_3S_1 = T_3S_2$，所以 $S_1S_2 \parallel A_1A_2 \parallel M_1M_2$。同理 $S_2S_3 \parallel M_2M_3$，$S_3S_1 \parallel M_3M_1$，即 $\triangle S_1S_2S_3$ 与 $\triangle M_1M_2M_3$ 的三边分别平行。因而，两者或全等或位似。

图 3.42

另一方面，$\triangle S_1S_2S_3$ 内接于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆，由于 $\triangle A_1A_2A_3$ 不是等边三角形，所以内切圆半径小于外接圆半径之半。因而，$\triangle S_1S_2S_3$ 与 $\triangle M_1M_2M_3$ 的外接圆半径不等，从而两者不可能全等而必然是位似。所以，三对对应顶点的连线 M_1S_1，M_2S_2，M_3S_3 必交于位似中心，当然是三线共点。

[例 3-90]　(第 24 届前苏联奥林匹克试题) 在正 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的边 A_1A_2 和 A_2A_3 上分别取一点 K 和 N，使得 $\angle KA_{n+2}N = \frac{\pi}{2n}$。证明：$NA_{n+2}$ 是 $\angle KNA_3$ 的平分线。

证明：以点 A_2 为中心，以 2 为相似系数，对正 $2n$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n}$ 作位似变换，得到正 $2n$ 边形 $A_1'A_2A_3'\cdots A_{2n}'$ (如图 3.43)，其中心刚好是点 A_{n+2}。将正 $2n$ 边形 $A_1'A_2A_3'\cdots A_{2n}'$ 绕点 A_{n+2} 顺时针旋转 $\frac{\pi}{n}$，则 $A_1'A_2$ 边上的点 K 就会移动到 A_2A_3 边上点 K_1 的位置(亦即在直线 NA_3 上) 上。由等式

图 3.43

$K_1A_{n+2} = KA_{n+2}$及$\angle K_1A_{n+2}K = \frac{\pi}{n}$,可知推知$\triangle K_1A_{n+2}N$和$\triangle KA_{n+2}N$全等,所以

$$\angle KNA_{n+2} = \angle K_1NA_{n+2} = \angle A_3NA_{n+2}$$

此即表明NA_{n+2}是$\angle KNA_3$的平分线,得证。

值得指出,位似变换在国外一些高层次的数学竞赛中经常出现,有必要在国内的培训中加强这方面的训练。

上面介绍了在数学竞赛中常用的几何变换的四种基本形式及应用。这四种变换的有关性质及合成等等的进一步研究,请感兴趣者参见有关专门著作和文章。但需注意,在数学竞赛培训中,几何变换内容切不可搞得过难,过繁,要切合现行中学教材和国内外数学竞赛对几何要求的实际。

习　题　3.6

1. AD 是三角形$\triangle ABC$的角 A 的平分线,已知$AB = AC + CD$。求证:$\angle C = 2\angle B$。

2. 已知$\triangle ABC$中,$\angle A$为直角,$\angle B$的平分线 BD 与 BC 边上的高 AE 交于点 F,过 F 作 BC 的平行线,交 AC 于 G。求证:$AD = GC$。

3. 给定两个相交的圆,它们都内切于同一个顶点为 A 的角,现知两圆周的交点之一是 B,它们在角的某一条边上的切点分别是 C 和 D。证明:直线 AB 与经过 B, C, D 三点的圆周相切(第 24 届前苏联试题)

4. 通过等腰三角形的底边 BC 上的点 P,引平行于两腰的直线交两腰于 Q, R。证明:点 P 关于直线 QR 的对称点 D 在等腰$\triangle ABC$的外接圆上(1950 年匈牙利赛试题)。

5. 在$\triangle ABC$中,BC 边等于另两边和的一半。证明:$\angle BAC$的平分线垂直于$\triangle ABC$的外心和内心的连线(第 27 届莫斯科试题)。

3.7 空间问题

在各种数学竞赛中,几何问题占有相当重要的地位,而其中的空间问题也不少。

数学竞赛中的空间问题,一般要求较强的想象能力,要求解题者能从整体上把握住复杂的图形,并实现有效的转化。

下面介绍处理空间问题的一些策略。

1. 化归为平面几何问题

在解决空间问题时,首先要分析条件、结论的特征,寻找或者确定一个数量关系比较集中的平面,逐步把题目的其它条件向该平面转移,从而将空间问题化归为平面几何问题。

[例 3-91] (第 24 届前苏联奥林匹克试题)设 d 是任意四面体的相对棱间距离的最小值,h 是四面体的最小高的长。证明: $2d > h$。

分析: 如图 3.44,不妨设 $AH = h$,AC 与 BD 的距离为 d。作 AF,CN 分别垂直 BD 于 F,N,显然 $HF \parallel CN$,于是可在平面 BCD 内作矩形 $FECN$。现考虑$\triangle AEF$,AH 为其边 EF 上的高,AE 边上的高 $FG = d$,EM 为 C 到面 ABD 之距离,$EM \geq AH$。这样一来,题中的数量关系都集中到了平面 AEF 内,问题转化为一个平面几何问题。

这时由 $AH \leq EM$ 得 $AF \leq EF$,再由$\triangle AEH \backsim \triangle FEG$ 得 $h/d = AH/FG = AE/EF < (AF + EF)/EF \leq 2$。

证略。

注: 例 3-91 中所述构图法在求四面体对棱所成的角,对棱的距离时十分有

用。

[例 3-92] (第 11 届美国竞赛试题)已知点 A, B, C 为球 S 内三点, 且 AB, AC 垂直于 S 的过 A 点的直径(如图 3.45 所示)。过 A, B, C 可作两个球均与 S 相切, 证明它们的半径之和等于 S 的半径。

分析: 设所作的两个球的球心为 S_1, S_2。(如图 3.46)。

图 3.44

图 3.45

图 3.46

因为球 S_1 过 A, B, C 三点, 所以球心 S_1 在过 ABC 的外心 O 并且垂直于平面 ABC 的直线 OD 上, 同样 S_2 也在 OD 上。又因 SA⊥平面 ABC, 所以 SA∥OD。

现过 SA 和 OD 作一平面 M, 平面 M 与球 S, S_1, S_2 相截得⊙S, ⊙S_1, ⊙S_2, 并且⊙S_1, ⊙S_2 都与⊙S 相切, 点 A 是

$\odot S_1$ 与 $\odot S_2$ 的一个交点。这样一来,问题就转化为一个平面几何问题(*):设满足上述性质的 $\odot S$, $\odot S_1$, $\odot S_2$ 的半径为 r, r_1, r_2, 则一定有 $r = r_1 + r_2$。

图 3.47

下证问题(*)。考虑如图 3.47 所示的梯形 SS_1S_2A, 则 $S_1A = r_1$, $S_2A = r_2$, $SS_1 = r - r_1$, $SS_2 = r - r_2$, 这样马上可求得 $\triangle S_1SA$ 和 $\triangle S_2SA$ 的周长相等且等于 $a + r$。

又因为 $S_1S_1 /\!/ SA$, 所以 $\triangle S_1SA$ 与 $\triangle S_2SA$ 的面积相等, 由面积的海伦公式得

$$P(P-a)(P-r_1)[P-(r-r_1)] = P(P-a)(P-r_2)[P-(r-r_2)] \tag{3-92-1}$$

其中 $P = \dfrac{a+r}{2}$。由(3-92-1)易得 $r_1(r-r_1) = r_2(r-r_2)$, 也就是 $(r_1 - r_2)(r - r_1 - r_2) = 0$, 所以 $r_1 = r_2$ 或 $r = r_1 + r_2$

当 $r_1 = r_2$ 时, $\triangle AS_1S_2$ 与 $\triangle SS_1S_2$ 都是以 S_1S_2 为底的等腰三角形, 并且底 S_1S_2 上的高是相等的, 所以 S 与 A 重合, 此时 $r - r_1 = r - r_2$, 即 $r_1 = r_2 = \dfrac{r}{2}$, 也有 $r = r_1 + r_2$。

综上便知命题(*)成立,故原题得证。

有时，条件与结论所涉及的数量关系，分散在几个平面内，不可能在一个平面上解决，这时应有计划。有步骤地从数量关系集中的平面、或者可能先解决的平面入手，向其它平面逐步转移。

[例 3-93] (第 2 届美国竞赛试题) 设 P，Q 是正四面体 ABCD 内的二点，求证：$\angle PAQ < 60°$。

分析：从题目的条件入手，首先应考虑的是 $\angle PAQ$ 所在平面，设这个平面与正四面体各面的交线为 AE，AF，EF；AP，AQ 交 $\triangle BCD$ 于 P'，Q'。为了利用正四面体的条件，只要证 $\angle EAF \leq 60°$ 便可(如图 3.48)，这可以通过证明在 $\triangle AEF$ 中 EF 是最小边来实现。然而在平面 AEF 中已难利用正四面体的性质，为此需向其它平面转移，考虑到 EF 在底面，自然就想到能否将 AF(或 AE)向底面转移，如图 3.49。根据正四

图 3.48　　　　　　图 3.49

面体的对称性，利用 $\triangle AFD \cong \triangle BFD$，可证 $BF = AF$。

而在底边为 BC 的三角形中，易见 $\angle BEF > \angle C = 60°$，$\angle EBF < 60°$，于是 $EF < BF$。这就证明了 $EF < AF$，同理 $EF < AE$，故 EF 确是 $\triangle AEF$ 的最小边，问题迎刃而解。

证略。

值得注意的是,铺展平面,即将多面体的棱将其剪开并铺平,可把空间问题转化为平面问题来研究。

[例 3-94]　(第 27 届 IMO 预选题)求证四面体每一顶点的各面角之和都为 180°的充要条件是各面都为全等的三角形。

分析:为了利用已知条件,沿边 AB, AC, AD 将四面体割开,将三个三角形 ABC, ACD, ADB 叠到△BCD 所在的平面上,分别用 A_1, A_2, A_3 表示顶点 A 的三个新位置。显然 $A_3B = BA_1$, $A_1C = CA_2$, $A_2D = DA_3$。这样问题便化归为一个平面几何问题。如图 3.50。

设每个顶点的三个面角之和都为 180°,所以 A_3, B, A_1 共线, A_1, C, A_2 共线, A_2, D, A_3 共线。因此 B, C, D 为△$A_1A_2A_3$ 各边之中点,所以题中四面体的四个面全等,必要性得证。

图　3.50

设四个三角形都全等, $DB = A_1C = CA_2$, $BC = A_2D = DA_3$, $CD = A_3B = BA_1$。在△BCD 中,令∠B= β,∠C= γ,∠D

$= \delta$。由全等性，$\angle A_1CB = \beta$，$\angle BCD = \gamma$，$\angle DCA_2 = \delta$，故 $\angle A_1CA_2 = \beta + \gamma + \delta = 180°$，类似可得，其它三个顶点的三个面角之和为 $180°$，充分性得证。

[例 3-95]　(1975 年波兰竞赛试题) 在棱长为 1 的正四面体的表面上选取一个由若干线段组成的有限集，使得四面体的任二顶点都可以用由这个集中一些线段组成的折线来连接。问能否选取满足上述要求的线段的集，使其中所有线段的总长度小于 $1+\sqrt{3}$？

解：可以，我们研究将已知四面体的两个面铺平后产生的菱形 ABDC 如图 3.51，那么 $AB = 1$，$\angle BAC = 60°$，设 P 是线段 BC 的中点，Q 是 $\triangle ABP$ 中的 Fermat 点，并记 $x = AQ$，$y = BQ$，$z = PQ$，利用平面几何知识不难求得 $x + y + z = \frac{\sqrt{7}}{2}$。如果点 Q 与点 Q' 关于 P 对称，那么线段 AQ，BQ，QP，PQ'，CQ'，DQ' 组成的集就具有题中要求的性质，而且它们的长度之和是 $\sqrt{7}$，小于 $1+\sqrt{3}$。

图　3.51

2. **类比法**

通过空间问题与相应平面问题的类比，认识空间图形的性质，用类似平面问题的方法处理有时可获得解题思路。

[**例** 3-96]　**设** P **是四面体** ABCD **内任一点**，H **和** h **分别是** P **到四面体** ABCD **的界面上的点的最大与最小距离，求证**：$H \geq 3h$。

分析：**先考虑平面上的类似问题**："P **为**$\triangle ABC$ **内任一点**，H **和** h **分别是** P **到**$\triangle ABC$ **边上点的最大与最小值，则** $H \geq 2h$。"**显然**，$\triangle ABC$ **为正三角形且** P **为重心时**，$H = 2h$，**由此发现重心是一个特殊点。过重心** G **作**$\triangle ABC$ **一边的平行线，使** P **落入某一梯形内或边界上，如图** 3.52，

图　3.52

$$H / h \geq CP / PF \geq CH / HF = \frac{CG}{GD} = 2$$

类比到四面体，只需过四面体重心作某面的平行截面，使 P **落入三棱台内，并注意到重心将中线分成** 1∶3 **线段可知原题结论正确。证略。**

[**例** 3-97]　(**第** 3 **届美国竞赛试题**) **半径为** 1 **的球面上的两点用球内长度小于** 2 **的曲线段连结起来，证明：这条曲线段一定落在这个球的某个半球内。**

分析：**考虑平面上的类似问题**："**半径为** 1 **的圆周上的两点** A，B **用圆内长度小于** 2 **的曲线段**AB**连结起来，则**AB**一定**

落在这个圆的某个半圆内。”这个命题可这样证明：如图 3.53，作直径 $EF /\!/ AB$，则曲线AB一定与 EF 没有交点，若不然，设AB与 EF 有交点 C，再作 A 关于 EF 的对称点 A'，则 A'，O，B 共线，于是 $A'B = 2$，这时 $AB = AC + CB \geq AC + CB \geq A'B = 2$，与题设矛盾。这说明AB一定位于直径 EF 的一侧含有 A，B 的半圆内。

图 3.53

对于原命题，证明方法完全类似，只要过球心 O 作垂直于 $\angle AOB$ 的平分线 OC 的平面 π 再利用点的对称性设法证明AB上不可能有平面 π 上的点，即不穿过 π 便可(证明留作练习)。

3. 局部入手，整体配合

一个空间几何体要完整地作出图形有时感到困难，有时即使能完整地作出图形，也因其过于复杂，难以从整体上把握住图形的特征。这时我们可把注意力放在某一局部，先从局部入手，再转向整体。

[例 3-98]　(第 16 届美国普特南竞赛试题) 一个球内切于四面体，将每个切点与该点所在面的三顶点连结，这样每面的三个角(以切点为顶点) 组成一集合。试证这四个集合是相等的。

证明：先看相邻两面的情况，如图 3.54，O 为内切球心，

Q_1, Q_2 为切点, 则 $Q_1P_3 = Q_2P_3$, $Q_1P_4 = Q_2P_4$, $\triangle P_3P_4Q_1 \cong \triangle P_3P_4Q_2$ 得 $\angle P_3Q_1P_4 = \angle P_3Q_2P_4$。同理 $\angle P_iQ_jP_l = \angle P_iQ_kP_l$ (其中 i, j, k, l 表示{1, 2, 3, 4}的不同元素)。我们用 Q_{il} 表示这种角。

由于以 Q_i 为顶点的三个角相加是 2π, 故有

$$\theta_{23} + \theta_{34} + \theta_{42} = 2\pi$$

$$\theta_{34} + \theta_{41} + \theta_{13} = 2\pi$$

$$\theta_{41} + \theta_{12} + \theta_{24} = 2\pi$$

$$\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31} = 2\pi$$

将这些方程的前两个相加减去后两个, 且注意到 $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ 得 $\theta_{12} = \theta_{34}$。又由对称性得 $\theta_{ij} = \theta_{kl}$。

图 3.54

这样以 Q_1 为顶点的角是 θ_{23}, θ_{34}, θ_{42}, 分别等于以 Q_2 为顶点的三个角, 即 θ_{41}, θ_{34}, θ_{13}。由对称性, 在所有四个面上的中心角的四个集合确实相等。

注: 第 26 届 IMO 由苏联提供的预选题第 4 题为: 四面体 ABCD 的内切球与面 ABD 和 DBC 分别相切于 K 点和 M 点, 证明: $\angle AKB = \angle DMC$。显然, 这道试题为例 3-98 的特殊情形。

[例 3-99] 求证: 四面体存在与六棱相切的棱切球的充分必要条件是三组对棱之和相等。

分析: 由切线长定理知必要性显然。下就充分性证明之。如图 3.55, 设 l 是过△ACD 的内心 O_1 且垂直于面 ACD 的直线, 则 l 到△ACD 的三边等距, 设 g 是过△BCD 的内心 O_2 且垂直于面 BCD 的直线, 则 g 也到△BCD 的三边等距。

设△ACD 与△BCD 的内切圆⊙O_1 和⊙O_2 分别切 CD

边上于 E, F 两点, 由 $AD+BC=AC+BD$ 知

$$(AH+HD)+(BN+CN)=(AG+CG)+(BM+MD)$$

即 $HD+CN=CG+MD$, 从而 $2EF=0$ 这说明⊙O_1 与⊙O_2 分别切于 CD 上的同一点 E, 所以 l 与 g 相交。

图 3.55

设 $l\cap g=0$, 则 O 到除 AB 外的各棱等距, 再考虑其他任何两面过内心的垂线, 同理可证他们两两相交。再根据熟知的结论"空间三条以上的直线两两相交且不共面则必相交于一点"知, 这样的四垂线交于一点 O, 该点到六棱等距, 这便是所求棱切球的球心, 充分性证毕。

几乎同样的方法我们可证: 四面体 S-ABC 存在与△ABC 三边及其余各棱相切的旁切球的充要条件为 $SA+AB=SC+BC$, $SA+AC=SB+BC$, $SA+AB=SC+AC$。利用这些结论, 解决有些四面体和球的相接问题是十分方便的。

[例 3-100] (1987 年中国冬令营试题) 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体, S_1, S_2, S_3, S_4 分别是以 A_1, A_2, A_3, A_4 为球心的球面, 它们两两相切, 如果存在一点 O, 使得以点 O 为球心可作一个半径为 r 的球面 P 与 S_1, S_2, S_3, S_4 都外切, 还可作一个半径为 R 的球面 Q 与四面体的各棱都相切, 证明: 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体。

分析: 作出完整的空间图形是有困难的, 先从局部入手, 考虑其中三个球 S_1, S_2, S_3 两两外切时切点的位置。如图 3.56 设球面 S_1, S_2, S_3 两两外切的切点为 B, C, D, 则 B, C, D 必分

别在 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 上,且有 $A_1B = A_1D = r_1$, $A_2B = A_2C = r_2$, $A_3C = A_3D = r_3$(其中 r_i 为 S_i 的半径, $i = 1, 2, 3$)又

$$A_1B + A_2B = A_1A_2$$

$$A_1D + A_3D = A_1A_3$$

$$A_2C + A_3C = A_2A_3$$

图 3.56

于是便有

$$A_1B = \frac{A_1A_2 + A_1A_3 - A_2A_3}{2},$$

$$A_2C = \frac{A_1A_2 + A_1A_3 - A_2A_3}{2},$$

$$A_3D = \frac{A_1A_2 + A_2A_3 - A_1A_3}{2}$$

这说明 B, C, D 正好是$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆切三边的切点。

注意到棱切球 Q 在面 $A_1A_2A_3$ 上的截面圆正好是$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆,这说明球面 Q 与棱 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 相切的切点和 S_1, S_2, S_3 两两外切的切点分别重合。

上面只考虑了面 $A_1A_2A_3$ 的情况,由对称性知球面 S_1, S_2, S_3, S_4 两两外切的切点与球面 Q 和各棱的切点分别重合。

下面就是计算验证的任务了,如图 3.57,过点 A_1, A_2 和 O 作截面,OB 是球面 S_1 和 S_2 的公切线,且 $OB = R$,则由切割线定理有 $R^2 = r(r + r_1) = r(r + r_2)$,由此得到 $r_1 = r_2$。同理可得 $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$,从而

$$A_1A_2 = A_1A_3 = A_1A_4 = A_2A_3 = A_2A_4 = A_3A_4$$

即四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体(至于球面 P 与球面 S_1, S_2,

S_3, S_4 都内切的情形, 证明是相仿的), 问题得以解决(证略)。

4. 构造辅助图形法

构造辅助图形法常用的有补形法和截面法。

[例 3-101] (1953 年波兰竞赛试题) 求证: 凡两条对棱具有给定长度且落在两条固定直线上的所有四面体等积。

图 3.57

证明: 如图 3.58, 将四面体补成平行六面体。因 AB, CD 长度固定, 设 l, g 所成的角为 θ, 距离为 h, 则 θ, h 都是定值。这时 $V_{ABCD} = \frac{1}{6}V_{平行六面体} = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot h \cdot \sin\theta$ 为定值, 得证。

[例 3-102] (第 48 届莫斯科竞赛试题) 证明: 如果四面体相对棱间的距离分别为 d_1, d_2 和 d_3, 则四面体的体积 V 不小于 $\frac{1}{3}d_1d_2d_3$。

图 3.58

证明: 设四面体 ABCD 的三组对棱为 AB 与 CD, AD 与 BC, AC 与 BD, 过四面体的三组对棱分别引三对相互平行的平面, 得平行六面体 $AD_1BC_1-A'DB'C$(如图 3.59), 它的各

面的对角线刚好是四面体的棱，各相对面的距离分别等于四面体三组对棱的距离。易知这个平行六面体的体积正好是四面体 $ABCD$ 体积的 3 倍。

在平面 $A'DB'C$ 中，作 $EF \perp CA'$，$E \in A'C$，$F \in DB'$，则 EF 不小于平面 $A'AC_1C$ 与平面 DD_1BB 的距离，即 $EF \geq d_3$，又 $CA' \geq d_2$，所以

图 3.59

$$S_{A'DB'C} \geq d_2 d_3$$

又平面 $A'DB'C$ 与平面 AD_1BC_1 的距离为 d_1，因此

$$V_{A'DB'C-AD_1BC_1} = S_{A'DB'C} \cdot d_1 \geq d_1 d_2 d_3$$

故 $V_{ABCD} \geq \frac{1}{3} d_1 d_2 d_3$，得证。

[例 3-103]　(第 15 届加拿大竞赛试题) 三角形的面积由三条边长唯一确定，问四面体体积是否由四个面积唯一确定？

分析：对一般四面体无从下手，先看看四面体四面等积的情况，如图 3.60，构造四面体使 $AB = CD$，$AC = AD = BD = CB$。一般地，若四面体中有一组对棱互相垂直，则我们常常过其中一条作另一条的垂直的截面然后求体积。本题中，取 CD 中点 E，设 $BE = a$，$\angle EBC = \theta$，则 $CD = AB = 2a\operatorname{tg}\theta$，$EG = a \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$。所以 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABE} \cdot CD = \frac{2}{3} S^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\theta(1 - \operatorname{tg}^2\theta)}$，其中 $S = a^2 \operatorname{tg}\theta$ 为等面四面体的四个面积之

一,故 V 与 θ有关,即不能由四个面的面积唯一确定。

此例说明,三角形中有关性质在四面体中不一定具备。

5. 运用度量公式

我们把空间中的各种体积公式,关于四面体的正弦定理,余弦定理,射影公式等等统称为空间中的度量公式。利用度量公式易于发现空间几何量之间的数值关系。

图 3.60

[例 3-104] (第 22 届前苏联奥林匹克试题)证明:对任何四面体都有如下不等式成立

$$r < \frac{ab}{2(a+b)}$$

其中 a 和 b 是四面体的一组对棱的长度,r 是其内切球的半径。

证明:我们知道,四面体的内切球的半径 r 等于$\frac{3V}{S}$,其中 V 是四面体的体积,S 是其表面积。又由熟知的史坦纳定理 $V=\frac{1}{6}abd\sin\theta$,其中 d 为对棱 a,b 之间的距离,$\theta$为 a,b 所成的角。于是 $r\leq\frac{1}{2}\frac{abd}{S}$。

另一方面,由四面体的棱 b 之端点到棱 a 之端点的距离均不小于 d,且其中必有一个大于 d,这样一来,可知四面体的两个与棱 a 相邻的面积之和大于 ad,类似地,四面体的另

外两个面的面积之和大于 bd, 于是

$$S > (a + b) d$$

故 $r < \frac{abd}{2S} < \frac{abd}{2(a+b)d} = \frac{ab}{2(a+b)}$, 得证。

*[例 3-105] 证明: 对任意四面体的高 h_1, h_2, h_3, h_4 与各对棱间的距离 d_1, d_2, d_3 有

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}$$

证明: 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中, 用 h_i 表示由顶点 A_i 引出的高, S_i 为顶点 A_i 所对的那个面的面积, d_1, d_2, d_3 和 ψ_1, ψ_2, ψ_3 分别是棱 A_2A_3, A_1A_3, A_2A_1 与它们的对棱之间的距离和夹角。Q_1, Q_2, Q_3 表示以 A_2A_3, A_1A_3, A_2A_1 与它们的对棱为两条对角线且交角为 ψ_1, ψ_2, ψ_3 的三个平行四边形的面积, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 表示关于棱 A_2A_3, A_1A_3, A_2A_1 的二面角, 于是四面体的体积

$$V = \frac{1}{3}h_iS_i = \frac{1}{6}A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot d_1 \sin\psi_1 = \frac{1}{3}d_kQ_k \quad (3\text{-}105\text{-}1)$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2, 3$, 其次由射影定理有

$$S_4 = S_1\cos\varphi_1 + S_2\cos\varphi_2 + S_3\cos\varphi_3 \quad (3\text{-}105\text{-}2)$$

最后, 还有

$$S_4^2 + S_k^2 - 2S_4S_k\cos\varphi_k = Q_k^2 \quad (3\text{-}105\text{-}3)$$

(3-105-3) 式可证如下: 作一个与棱 A_2A_3 垂直的平面, 并且设 a, b, c 分别是棱 A_1A_2, A_2A_4, A_1A_4 在该平面上投影的长。根据余弦定理有

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = c^2 \quad (3\text{-}105\text{-}4)$$

(3-105-4) 式两边同乘以 $\left(\frac{A_2A_3}{2}\right)^2$, 就得到所要证的等式(3-105-3) 中当 $k = 1$ 时的情形, 当 $k = 2, 3$ 时, 证明是相仿的。

这样,由(3-105-2),(3-105-3)得到

$$Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2=3S_4^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_4(S_1\cos\varphi_1+S_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3)=S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2$$

从而 $\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}=\frac{Q_1^2}{9V^2}+\frac{Q_2^2}{9V^2}+\frac{Q_3^2}{9V^2}=\frac{S_1^2}{9V^2}+\frac{S_2^2}{9V^2}+\frac{S_3^2}{9V^2}+\frac{S_4^2}{9V^2}$

$=\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}$

得证。

上例的结论是四面体的一个非常深刻的结果,由此可导出关于对棱距的许多有趣不等式如$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}\geq\frac{1}{4r^2}$(其中 r 为四面体内切球的半径),证明略作读者练习。

6. 巧用体积关系

数学竞赛中有不少关于体积问题的试题。同时巧妙运用体积关系,还是处理空间中非体积问题的一种方法。

[例 3-106] (第 29 届 IMO 预选题)在给定的四面体 ABCD 中,设 K 和 L 分别是棱 AB 和 CD 的中点。证明:每个含直线 KL 的平面把此四面体分为等体积的两部分。

证明:设 MKNL 是四面体 ABCD 的一个包含线段 KL 的截面。因为 K 为 AB 的中点,故△ACK 和△BCK 的面积相等,从而知四面体 DACK 和四面体 DBCK 的体积相等。因此要证截面 MKNL 将四面体 ABCD 分成等体积的两部分,只要证明四面体 DKLN 和四面体 CKLM 的体积相等就可以了。(如图 3.61)

由点 M 和 N 分别作平面 DCK 的垂线,垂足设为 P,Q。因为 L 为 CD 的中点,所以△CKL 和△DKL 面积相等,故要

证四面体 DKLN **和四面体** CKLM **的体积相等,只要证明** MP = NQ **便可。**

图 3.61　　　　**图** 3.62

设 KL **和** MN **交于** O **点,易知** P, O, Q **三点共线,故要证** MP = NQ, **只要证明** MO = NO **就可以了(通过** Rt△OMP ≌ Rt△ONQ **得到)。**

为此,考察两个平行平面,异面直线 DB **和** AC **分别在两个平面上(如图** 3.62)。**因为** KL **是连结** AB、CD **中点的线段,所以它在与上述两平面平行的平面上,这个平面到两已知平面的距离相等,由于线段** MN **与** KL **相交于** O, **所以** O **等分线段** MN **即** MO = ON。**故此得证。**

[**例** 3-107]　(1973 **年前捷克试题)证明:对任意四面体的高** h_i **和旁切球的半径** r_i, $i = 1, 2, 3, 4$ **有**

$$2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}。$$

证明:记四面体的体积为 V, O_i **和** S_i **分别是** A_i **所对旁切球球心和所对面面积,如图** 3.63, **则** $V = V_{O_1-A_1A_3A_4} + V_{O_1-A_1A_2A_4} + V_{O_1-A_1A_2A_3} - V_{O_1-A_2A_3A_4} = \frac{1}{3}(S_2 + S_3 + S_4 - S_1) r_1$,

图 3.63

所以

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{3}(S_2+S_3+S_4-S_1)/V$$

同理

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{3}(S_1+S_3+S_4-S_2)/V,$$

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{3}(S_1+S_2+S_4-S_3)/V$$

$$\frac{1}{r_4}=\frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3-S_4)/V$$

所以

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{3}\frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{V} \qquad (3\text{-}107\text{-}1)$$

而 $V=\frac{1}{3}S_ih_i$, 因此 $\frac{1}{h_i}=\frac{1}{3}\frac{S_i}{V}$, $i=1, 2, 3, 4$, 故

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{3}\frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{V} \qquad (3\text{-}107\text{-}2)$$

由(3-107-1)和(3-107-2)两式便得所证等式。

上面介绍了处理空间问题的六种常用方法。其实,较为常用的方法远远不止这些,如向量方法,反证法等等,限于篇幅,这里都不再予以介绍,请读者参看有关的著作。

习　题　3.7

1. 一个给定的四面体 ABCD 是等腰的,即 AB = CD, AC = BD, AD = BC,证明:这个四面体的各面都是锐角三角形(第 1 届美国竞赛试题)。

2. 求证:若四面体的六个二面角相等,则该四面体为正四面体(第 7 届美国数学竞赛试题)。

3. 给定四面体 T,把 T 的面上的中线按下列方式写成"线对",每一对中线是从同一边上引出来的,如果每一"线对"相等,问最多有多少种不同长度的中线?

4*. 已知立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,求立方体底面的内切圆与过点 A, C, B_1 的圆之间的最短距离(前苏联第 19 届竞赛试题)。

5*. $A_1, \cdots, A_5$ 在半径为 1 的球上,问 $\min\limits_{1\leq i,j\leq 5} A_iA_j$ 的最大值是多少?(第 30 届 IMO 预选题)

6. 证明:过立方体中心的任意一个截面的面积不小于立方体的一个侧面的面积(第 18 届前苏联竞赛试题)。

7. 若一个四面体恰有一棱之长大于 1,求证这四面体的体积 $V\leq\frac{1}{8}$(第 9 届 IMO 试题)。

3.8　多项式问题

多项式理论是代数学的一个重要组成部分,有关多项式

方面的问题常常被用作数学竞赛的试题。下面介绍处理多项式问题的一些常用方法和技巧。

1. 利用多项式恒等定理

多项式恒等定理: 多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$ 的充分必要条件是 $a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots, a_{n-1}=b_{n-1}, a_n=b_n$。

[例 3-108] (1963 年北京市数学竞赛试题) 已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数, 并且 $bd+cd$ 是奇数, 证明: 这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积。

证明: 因为 $bd+cd=d(b+c)$ 为奇数, 所以 $b+c$ 与 d 都是奇数, 从而 b, c 一奇一偶。

(i) b 为偶数, c, d 为奇数。假设

$$\varphi(x)=x^3+bx^2+cx+d$$

能分解成两个整系数多项式的乘积, 则一定有一个一次因式, 因为 $\varphi(x)$ 首项系数为 1, 故不妨设

$$(x+p)(x^2+qx+r)\equiv x^3+bx^2+cx+d \tag{3-108-1}$$

其中 p, q, r 都是整数, 比较上式两边 x 同次幂的系数, 得

$$pr=d=\text{奇数} \tag{3-108-2}$$

$$pq+r=c=\text{奇数} \tag{3-108-3}$$

$$p+q=b=\text{偶数} \tag{3-108-4}$$

从(3-108-2)知 p, r 都是奇数, 再由(3-108-4)知, q 必为奇数, 这就和(3-108-3)矛盾。

(ii) c 为偶数, b, d 为奇数, 同样可以导出矛盾。

所以 $\varphi(x)$ 不能分解成整系数多项式之积。

[例 3-109]　(第七届加拿大试题) 设 k 是正整数, 求一切多项式

$$P(x) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0x^n$$

其中 a_i 是实数, 满足等式 $P\{P(x)\} = \{P(x)\}^k$。

解: 若 $P(x)$ 为零多项式, 则它适合题意, 以下设 $P(x)$ 不是零多项式, 并设 n 是 $P(x)$ 的次数, 比较已知恒等式两边多项式的次数, 可得 $n^2 = kn$。

(i) 若 $n = 0$, 则 $P(x) \equiv c$(常数), 当 $k = 1$ 时, c 可取任意非零实数; 当 k 为正偶数时, $c = 1$; 当 k 为大于 1 的奇数时, $c = \pm 1$。

(ii) 若 $n > 0$, 则 $n = k$, 记

$$P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k \quad (a_0 \neq 0)$$

则有 $a_0(a_0x^k + \cdots + a_k)^k + a_1(a_0x^k + \cdots + a_k)^{k-1} + \cdots + a^k \equiv (a_0x^k + \cdots + a_k)^k$

比较两边最高项系数, 得 $a_0^{k+1} = a_0^k$, 所以 $a_0 = 1$, 则上式变为

$$a_1(a_0x^k + \cdots + a_k)^{k-1} + \cdots + a_k \equiv 0$$

所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k \equiv 0$, 故 $P(x) = x^k$。

2. 利用方程的根与系数之间的关系

方程的根与系数之间的著名关系是韦达定理: 设方程 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的根为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = - a_1$$

$$x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = a_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n = (-1)^n a_n$$

[例 3-110]　(第 29 届 IMO 预选题) 假设 $x^3 + px^2 + qx + r =$

0 的根全是正实数, 试求 p, q 与 r 之间的一种关系, 此关系是方程的根恰好是一个三角形三个角的余弦的必要条件。

解: 由韦达定理

$$\cos A + \cos B + \cos C = -p \qquad (3\text{-}110\text{-}1)$$

$$\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = q \qquad (3\text{-}110\text{-}2)$$

$$\cos A\cos B\cos C = -r \qquad (3\text{-}110\text{-}3)$$

由(3-110-1), (3-110-2)得

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = p^2 - 2q \qquad (3\text{-}110\text{-}4)$$

由(3-110-3)得 $-2r = \cos A\cos(B+C) + \cos A\cos(B-C)$

$$= -\cos^2 A - \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C)$$

$$= -(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) + 1$$

$$(3\text{-}110\text{-}5)$$

由(3-110-4), (3-110-5)得 $2r + 1 = p^2 - 2q$, 此即 p, q, r 所需满足的条件。

[例 3-111] (第 29 届美国普特南数学竞赛题) 试题定形如 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $a_i = \pm 1$, $0 \leq i \leq n$, $1 \leq n \leq \infty$的全体多项式, 使每个多项式的根都是实数。

解: 不妨先只考虑首项系数 $a_0 = 1$, 由韦达定理知

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的 n 个根的和为 $-a_1$, 这 n 个根两两之积的和为 a_2, 故这 n 个根的平方和为 $a_1^2 - 2a_2$; 而它们的积的平方为 a_n^2, 由于 n 个根都是实数, 故由平均不等式知

$$\frac{a_1^2 - 2a_2}{n} \geq (a_n^2)^{\frac{1}{n}}$$

其中等号当且仅当这 n 个根全相等时成立。

由于 $a_i = \pm 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$，所以 $\frac{1 \pm 2}{n} \geq 1$，于是 $n \leq 3$（$n \leq -1$ 无意义）。注意到 $n > 1$ 时，$a_2 = -1$，$n = 3$ 时，方程 $P(x) = 0$ 的根只能是 ± 1（不难验证另外的三次多项式只有一个根）。据此即得符合题意的全体多项式如下:

$\pm(x - 1)$，$\pm(x + 1)$，$\pm(x^2 + x - 1)$，$\pm(x^2 - x - 1)$，
$\pm(x^3 + x^2 - x - 1)$，$\pm(x^3 - x^2 - x + 1)$。

（方程的根与系数的关系可导出实系数方程的虚根成对出现。）

[例 3-112] 设 $f(x)$ 是一个复系数三次多项式，α 和 β 是两个虚数，$\alpha \neq \beta$ 及 β 且 $f(\alpha) = \overline{f(\alpha)}$，$f(\beta) = \overline{f(\beta)}$，试证: $f(x)$ 是一实系数多项式。

证明: 设 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$，由 $f(\alpha) = \overline{f(\alpha)}$ 可得

$$\alpha^3(a_3 - a_3) + \alpha^2(a_2 - a_2) + \alpha(a_1 - a_1) + (a_0 - a_0) = 0$$

这个等式说明 α 是方程

$$x^3(a_3 - a_3)i + x^2(a_2 - a_2)i + x(a_1 - a_1)i + (a_0 - a_0)i = 0 \quad (3\text{-}112\text{-}1)$$

的一根，这里 i 为虚数单位。再注意到 $a_j - a_j (j = 0, 1, 2, 3)$ 是零或纯虚数，方程(3-112-1)是一个实系数方程，故 α 也是方程(3-112-1)的根。

同理可证，β，β 也是方程(3-112-1)的根，由题设易知 α，α，β，β 两两不相等。这样方程(3-112-1)有四个不同的根，故 $a_j - a_j = 0$，即 $a_j = a_j (j = 0, 1, 2, 3)$。这就证明了 $a_j (j = 0, 1, 2, 3)$ 都是实数，$f(x)$ 是一个实系数多项式。

3. 利用多项式的余数定理及因式定理

余数定理　多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数为 $f(a)$。

因式定理　多项式 $f(x)$ 有因式 $x-a$ 的充分必要条件是 $f(a)=0$。

[例 3-113]　(1963 年北京市竞赛试题) 设 $P(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1 x_1+a_0$, 式中各系数 $a_i(i=0,1,\cdots,k)$ 都是整数, 今设有四个不同的整数 x_1,x_2,x_3,x_4, 使 $P(x_i)=2(i=1,2,3,4)$。试证明: 对于任何整数 x, $P(x)$ 决不等于 1, 3, 5, 7, 9 中的任何一个。

证明: 由题设条件及因式定理有

$$P(x)-2=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)Q(x) \tag{3-113-1}$$

其中 $Q(x)$ 是一个整系数多项式, 或者是一个整数。

由于当 x 为整数时, $x-x_1, x-x_2, x-x_3, x-x_4, Q(x)$ 总是整数, 而且前四者各不相等, 所以(3-113-1)式右端至少有四个不同的因数, 因此对于任何整数 x, $P(x)$ 决不等于 1, 3, 5, 7, 9 中的任何一个。得证。

[例 3-114]　(第 16 届 IMO 试题) 设 $P(x)$ 是非常数的整系数多项式, $n(P)$ 表示满足 $[P(x)]^2=1$ 的所有不同整数 x 的个数, 证明

$$n(P)-\deg(P)\leq 2,$$

其中 $\deg(P)$ 是多项式 $P(x)$ 的次数。

证明: 首先假定每一多项式 $P(x)-1$ 和 $P(x)+1$ 有不少于三个不同的整根, 且它们都是彼此相异的, 在这六个整数中, 取其中最小的一个记为 λ 不失一般性, 不妨设 λ 是多项

式 $P(x)+1$ 的根, 于是由因式定理可得

$$P(x)+1=(x-\lambda)Q(x)$$

其中 $Q(x)$ 也是一个整系数多项式。

设 a, b, c 为多项式 $P(x)-1$ 的三个不同的整根, 由于已取定了 λ, 故 a, b, c 都大于 λ, 因为 $P(x)-1=(x-\lambda)Q(x)-2$, 故由余式定理知

$$2=(a-\lambda)P(a)=(b-\lambda)Q(b)=(c-\lambda)Q(c)$$

其中 $a-\lambda$, $b-\lambda$, $c-\lambda$ 为三个不同的正整数, 但此时, 在这三个数中总有一个数要大于 2, 显然, 这个大于 2 的整数不可能是 2 的整因子。这样, 由此矛盾说明前面的假定是错误的, 换句话说, 方程 $P(x)=1$ 和 $P(x)=-1$ 中至少有一个方程其整根的个数不大于 2, 又因为这两个方程中, 每一方程的整根个数不能超过 $\deg(P)$, 所以 $n(P)\leq\deg(P)+2$, 即 $n(P)-\deg(P)\leq 2$。

4. 次数分析与根数分析

根据两相等之多项式次数必相等(或同为零多项式), 任何 n 次多项在复数范围内有且仅有 n 个根(重根按重数计算), 从分析多项式的次数或根数入手, 常可得出某多项式的特殊性质或某两多项式的相互关系, 由此开辟解题途径, 上面的例 3-109 和例 3-114 的解题过程实际运用了这一方法, 下面再看两例。

[例 3-115] (1984 年上海市竞赛试题) 设 $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$, $a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 n 个不同的整数, 求证 $P(x)$ 不能分解为两个次数大于 0 的整系数多项式之积。

证明 1: 反设有次数大于 0 的整系数多项式 $Q(x)$, $R(x)$, 使 $P(x)=Q(x)\cdot R(x)$, 则 $P(a_i)=Q(a_i)\cdot R(a_i)=-1$, $(i=1,2,\cdots,n)$。

假设 n 个整数 $Q(a_i)$ 中有 k 个等于 1, $n-k$ 个等于 -1, 不妨设 $Q(a_1)=\cdots=Q(a_k)=1$, $Q(a_{k+1})=\cdots=Q(a_n)=-1$, 则 $R(a_1)=\cdots=R(a_k)=-1$, $R(a_{k+1})=\cdots=R(a_n)=1$。于是 $Q(x)-1=(x-a_1)\cdots(x-a_k)Q_1(x)$, $Q(x)+1=(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)\cdot Q_2(x)$。相乘得

$$Q^2(x)-1=(x-a_1)\cdots(x-a_k)(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)Q_1(x)Q_2(x)$$

故知 $2\cdot \deg Q\geq n$, 同理 $2\cdot \deg R\geq n$, 因此 $\deg Q+\deg R\geq n$。但由 $P(x)=Q(x)R(x)$ 知 $\deg Q+\deg R=n$, 故必有 $\deg Q=\deg R=\frac{n}{2}$。当 n 为奇数时是不可能的, 当 n 为偶数时, 可知 $\deg(Q_1Q_2)=0$。由于 $P(x)$ 的最高项系数为 1, 则 $Q(x)$, $R(x)$ 亦然, 最高项系数同时为 ± 1。于是 $Q_1(x)Q_2(x)=1$。此时 $Q^2(x)-1=(x-a_1)\cdots(x-a_k)(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)=P(x)+1=Q(x)R(x)+1$, 由此可得 $Q(x)(Q(x)-R(x))=2$, 所以 $Q(x)$©2, 这与 $\deg Q>0$ 矛盾, 证毕。

证明 2: 仿证 1 得出 $Q(a_i)R(a_i)=-1$ 以后, 可知 $Q(a_i)=\pm 1$, $R(a_i)=$ ê 1, 于是恒有 $Q(a_i)+R(a_i)=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$。由于 $1\leq \deg Q<n$, $1\leq \deg R<n$, 所以 $1\leq \deg(Q+R)<n$。而现在 $Q(x)+R(x)$ 有 n 个根, 故 $Q(x)+R(x)\equiv 0$, 这样 $P(x)=Q(x)\cdot R(x)=-Q^2(x)$。但 $P(x)$ 的最高项系数为 1, 右边最高项系数为负, 矛盾, 得证。

上面的证明 1 使用了次数分析的方法。证明 2 既进行了

次数分析,也进行了根数分析,处理的过程要简单一些。

[例 3-116] (第 22 届 IMO 预选题)设多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的次数都大于 0,记

$$P_c = \{z \in C \mid P(z) = c\},\quad Q_c = \{z \in C \mid Q(z) = c\}$$

证明:如果 $P_0 = Q_0$, $P_1 = Q_1$,则 $P(x) \equiv Q(x)$。

证明:如果多项式 $P(x)$ 的根是 $\alpha, \alpha, \cdots, \alpha$,其重数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,则由于 $P_0 = Q_0$,所以多项式 $Q(x)$ 也有相同的根(但重数可能不同)。同理,如果多项式 $P(x)-1$ 的根是 $\beta, \beta, \cdots, \beta$,其重数分别为 $l_1, l_2, \cdots, l_r$,则由于 $P_1 = Q_1$,所以多项式 $Q(x)-1$ 也有相同的根。因此,在不同的数 $\alpha, \alpha, \cdots, \alpha, \beta, \beta, \cdots, \beta$ 中,每个数都是多项式 $P(x)-Q(x)$ 的根。设 $P(x)-Q(x) \not\equiv 0$,则

$$\deg(P(x)-Q(x)) \geq s+r$$

不妨设 $\deg P(x) \geq \deg Q(x) \geq 1$,因而

$$\deg P(x) = \deg(P(x)-1) \geq \deg(P(x)-Q(x))$$

其次,如果多项式 $P(x)-c$ 的根 r 的重数为 $m > 1$,则多项式 $P'(x)$ 有 $m-1$ 个重根 r,因此有

$$\begin{aligned}\deg P'(x) &\geq (k_1-1)+\cdots+(k_s-1)+(l_1-1)+\cdots+(l_r-1)\\ &= (k_1+\cdots+k_s)+(l_1+\cdots+l_r)-(s+r)\\ &\geq \deg P(x)+\deg(P(x)-1)-\deg(P(x)-Q(x))\\ &\geq \deg P(x)\end{aligned}$$

与 $\deg P'(x) < \deg P(x)$ 矛盾。因此 $P(x) \equiv Q(x)$。证毕。

对次数用归纳法是解多项式问题的常用方法。

[例 3-117] (1973 年波兰竞赛试题)证明:任何多项式可以表示成两个单调递增的多项式之差。

证明:对多项式 $f(x)$ 的次数用数学归纳法证明。

如果多项式 $f(x)$ 恒等于某个常数 c，则 $f(x)=(x+c)-x$，而多项式 $x+c$ 及 x 单调递增。

下面设 $f(x)$ 的次数大于零，并且任何次数比它低的多项式都可以表成两个单调递增的多项式之差的形式。

如果多项式 $f(x)$ 的次数是偶数(等于 $2n$)，那么

$$f(x)=ax^{2n}+g(x) \qquad (3\text{-}117\text{-}1)$$

这里 $g(x)$ 是次数低于 $2n$ 的多项式，由二项式定理，得

$$\frac{1}{2n+1}[(x+a)^{2n+1}-x^{2n+1}]=ax^{2n}+h(x) \qquad (3\text{-}117\text{-}2)$$

这里 $h(x)$ 是次数低于 $2n$ 的多项式，多项式 $(x+a)^{2n+1}$ 及 x^{2n+1} 单调递增，按归纳法假设，存在单调递增多项式 $F_1(x)$ 和 $G_1(x)$ 适合

$$g(x)+h(x)=F_1(x)-G_1(x) \qquad (3\text{-}117\text{-}3)$$

因此，如果令

$$F(x)=F_1(x)+\frac{1}{2n+1}(x+a)^{2n+1}$$

$$G(x)=G_1(x)+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

则由(3-117-1)，(3-117-2)和(3-117-3)，可得 $f(x)=F(x)-G(x)$，这里 $F(x)$，$G(x)$ 是两个单调递增多项式之和，所以它们也单调递增。

如果多项式 $f(x)$ 的次数是奇数(等于 $2n-1$)，那么

$$f(x)=ax^{2n-1}+g(x) \qquad (3\text{-}117\text{-}4)$$

其中多项式 $g(x)$ 的次数低于 $2n-1$，按归纳假设，存在单调递增多项式 $F_1(x)$ 和 $G_1(x)$ 适合

$$g(x)=F_1(x)-G_1(x) \qquad (3\text{-}117\text{-}5)$$

由于任何一个实数 a 总可以表示成两个正数之差 $a=b-c$，现在取 $b=|a|+1$，$c=|a|-a+1$，可使

$$ax^{2n-1}=bx^{2n-1}-cx^{2n-1} \qquad (3\text{-}117\text{-}6)$$

且多项式 bx^{2n-1} 与 cx^{2n-1} 都单调递增，因此，如果令

$$F(x)=F_1(x)+bx^{2n-1}$$

$$G(x)=G_1(x)+cx^{2n-1}$$

且由关系式(3-117-4)，(3-117-5)和(3-117-6)可得 $f(x)=F(x)-G(x)$，而且 $F(x)$，$G(x)$ 是两个单调递增多项式。得证。

5. 利用拉格朗日插值多项式

拉格朗日插值定理 给定两两不同的数 $b_0, b_1, \cdots, b_n \in C$，及任意的 $c_0, c_1, \cdots, c_n \in C$，则存在唯一的次数不大于 n 的多项式 $P(x)$，使得

$$P(b_0)=c_0, P(b_1)=c_1, \cdots, P(b_n)=c_n$$

而且 $P(x)$ 具有如下形式

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}} \frac{x-b_j}{b_i-b_j} \qquad (*)$$

(*)称为拉格朗日插值公式。

[例 3-118] (第 22 届 IMO 预选试题)设 n 次多项式 $P(x)$ 满足

$$P(k)=\frac{1}{C_n^k}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n$，求 $P(n+1)$

解：根据拉格朗日插值公式得

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^{k}}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leq i\leq n}}\frac{x-i}{k-i}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod_{i\neq k}(x-i)}{C_{n+1}^{k}(-1)^{n-k}(n-k)!k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+1-k)}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leq i\leq n}}(x-i)$$

这时

$$P(n+1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+1-k)}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leq i\leq n}}(n+1-i)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(n+1-i)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$$

因此，当 n 为奇数时，$P(n+1)=0$；当 n 为偶数时，$P(n+1)=1$。

[例 3-119]　(1979 年匈牙利数学竞赛试题) 设多项式 $P(x)$ 的次数最多是 $2n$，且对每个整数 $k\in[-n,n]$，都有 $|P(k)|\leq 1$。证明：对每个 $x\in[-n,n]$，$P(x)\leq 2^{2n}$。

证明：根据拉格朗日插值公式有

$$P(x)=\sum_{k=-n}^{n}\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leq i\leq n}}\frac{x-i}{k-i}$$

因为当 $k=-n,-n+1,\cdots,n$ 时，$|P(k)|\leq 1$，所以

$$|P(x)|\leq\sum_{k=-n}^{n}|P(k)|\cdot\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leq i\leq n}}\frac{|x-i|}{|k-i|}\leq\sum_{k=-n}^{n}\prod_{\substack{i\neq k\\-n\leq i\leq n}}\frac{|x-i|}{|k-i|}$$

对每个实数 $x\in[-n,n]$ 有

$$\prod_{\substack{-n\le i\le n\\ i\ne k}} |x-i| \le (2n)!$$

事实上，当 $x\ge k$ 时，有

$$\prod_{\substack{-n\le i\le n\\ i\ne k}} |x-i| = (|x-(k+1)|\cdots|x-n|)(|x-(k-1)|\cdots|x+n|)$$

$$\le (n-k)!\,((n-k+1)\cdots(2n)) = (2n)!$$

同理可证 $x<k$ 的情形。于是得到

$$\prod_{\substack{-n\le i\le n\\ i\ne k}} \frac{|x-i|}{|k-i|} \le (2n)! \prod_{\substack{-n\le i\le n\\ i\ne k}} \frac{1}{|k-i|} \le (2n)!\,\frac{1}{(k+n)!\,(n-k)!}$$

所以

$$P(x) \le \sum_{k=-n}^{n} \frac{(2n)!}{(k+n)!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!\,(2n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} = 2^{2n}$$

得证。

习　题　3.8

1. 决定所有正整数对(m, n)，使得$(1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn})$能被$(1+x+x^2+\cdots+x^m)$所整除(第6届美国奥林匹克试题)。

2. 已知两个整系数多项式，其乘积是偶系数多项式，但不是每个系数都能被4整除。证明：其中有一个偶系数多项式，另一个至少有一个系数为奇数。

3. 若实系数多项式$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$($n\ge 2$)在区间$[0,1]$上有$n$个实根，求证$a_2+a_3+\cdots+a_n\ge 0$。

4. 试求整数a, b, c，适合$0<|c|<|b|<|a|$，且使得$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$为整系数多项式。

5. 设给定整数 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, 证明, 多项式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 取的值当中, 存在这样一个数, 其绝对值不小于 $\frac{n!}{2^n}$ (第 19 届 IMO 预选题)。

3.9 集合问题

近年来, 国内外数学竞赛中, 有关集合问题的试题日益增多。集合问题的表述简单, 所涉及的知识较少, 而解决起来往往要求有较高的探索能力和构造能力。

集合问题较常见的有两类: 关于特殊子集的计算和论证问题; 集合的划分问题。解决这两类问题的常用方法有: 构造法, 反证法、数学归纳法、局部调整法等等。当然, 必须具体问题具体对待。

1. 特殊子集的存在、计算及构造

[例 3-120]　(1973 年美国纽约竞赛试题) 设有限集合 M R, B 是 M 的一个子集。如果集合 M 中每个数都可唯一地表示为集合 B 中数的整数次幂的乘积, 则 B 称为 M 的基。试问, 任何有限的正数集合都具有基, 对否?

解: 我们将证明: 有限的正数集合 $M(M \neq \{1\})$ 具有基 B。

设 S 是正数集合 M 的子集。如果 M 中每个数都可以表示为

$$\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\cdots\alpha_m^{i_m},\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in S, i_1, i_2, \cdots, i_m \in Z$$

则 S 称为 M 的上基。例如集合 M 自身即是 M 的上基。

在 M 的所有上基中, 取所含元素最少的集合 $S_0 = \{\beta,$

$\beta_1, \cdots, \beta_n\}$(因为 M 是有限集合，所以 S_0 存在)。可以证明，如果 $n \geq 2$，则 S_0 即是 M 的基。事实上，设某个 $u \in M$ 可表示为 S_0 中元素的两种不同形式的整数次幂之乘积

$$u = \beta_1^{i_1}\beta_2^{i_2}\cdots\beta_n^{i_n} = \beta_1^{j_1}\beta_2^{j_2}\cdots\beta_n^{j_n}$$

记 $k_l = i_l - j_l$，则 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为 0，且

$$\beta_1^{k_1}\beta_2^{k_2}\cdots\beta_n^{k_n} = 1$$

不妨设 $k_n \neq 0$，则记 $r_i = \beta_i^{1/k_n}$，$i = 1, 2, \cdots, n-1$，并取 $S_1 = \{r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}\}$，于是集合 S_0 中每个元素都可表示为 S_1 中元素的整数次幂之乘积，这只要取 $\beta_i = r_i^{k_n}$，$i = 1, 2, \cdots, n-1$，且 $\beta_n = r_1^{-k_1}r_2^{-k_2}\cdots r_{n-1}^{-k_{n-1}}$便可。因此集合 S_1 是 M 的上基，且只含 $n-1$ 个元素，与 S_0 的选取矛盾。因此 S_0 是 M 的基。

其次当 $n = 1$ 时，M 有上基 $S_0 = \{\beta_1\}$。如果 $\beta_1 \neq 1$，则因为当 $i \neq j$ 时不可能有 $\beta_1^i \neq \beta_1^j$，所以 S_0 是 M 的基。如果 $\beta_1 = 1$，则 $S_0 = \{1\}$，于是 $M = \{1\}$，这时没有符合题意的基。

[例 3-121]　(1988 年上海市数学竞赛试题) 对集合 $S = \{(a_1, a_2, \cdots, a_5) | a_i = 0$ 或 $1, i = 1, 2, \cdots, 5\}$中的任意两个元素 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_5)$ 和 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_5)$，定义它们之间的距离为:

$$d(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_5 - b_5|$$

取 S 的一个子集 T，使 T 中任意两个元素之间的距离都大于 2。子集 T 最多含有多少个元素? 证明你的结论。

解: T 中最多能有 4 个元素。

如果有一个 5 个元素以上的子集也符合题设条件，因为每个元素的每一位数码只能取 0 或 1 两个不同的值，所以这五个元素中至少有 3 个的第一位数码相同，不妨设 A, B, C 三个元素的第一位数码相同。

同样, 在 A, B, C 三个元素中, 第二、第三、第四、第五 4 个数码中, 每一位都至少有两个元素的对应数码相同。但 A, B, C 三元素两两分组只有 $C_3^2=3$ 组, 故至少有两个元素, 它们除第一个数码相同外, 至少还有两位数码相同。不妨设为 A 与 B, 则 A 与 B 的距离不大于 2, 与假设矛盾。故符合题设条件的子集 T 的元素不多于 4 个。

再令 T= {(1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)}, 则不难验证 T 中任何两个元素的距离都大于 2。

综上知 $|T|_{max}=4$。

[例 3-122] (1988 年国家集训队选拔题) 设 $n\in N$ 大于 3, 且具有下列性质: 把集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$ 任意分为两组, 总有某个组, 它含有三个数 a, b, c(允许 a= b), 使得 ab= c。求这种 n 的最小值。

解: 设 $n\geq 3^5$, 则 $3, 3^2, 3^4, 3^5\in S_n$。设集合 S_n 分为两组 A 和 B, $3\in A$, 且 A 和 B 不满足题中条件。如果 $3^2\in A$, 则 $3, 3, 3^2\in A$, 不可能。因此 $3^2\in B$; 如果 $3^4\in B$, 则 $3^2, 3^2, 3^4\in B$, 不可能, 因此 $3^4\in A$; 如果 $3^3\in A$, 则 $3, 3^3, 3^4=3\cdot 3^3\in A$, 不可能, 因此 $3^3\in B$。于是, 由于 $3, 3^4\in A$, 所以 $3^5\in B$。这时 B 中三元 $3^2, 3^3, 3^5$ 满足 ab= c, 矛盾。这表明, 当 $n\geq 3^5$ 时, 把集合 S_n 任意分为两组, 总有某个组, 具有题中性质, 即所求最小值不超过 $3^5=243$。

另一方面, 取 n= 242, 且设

$A=\{k \mid 9\leq k\leq 80\}$

$B=\{k \mid 3\leq k\leq 8$ 或 $81\leq k\leq 242\}$

则 $S_{242}=A\cup B$, 而且 A 和 B 都不具题中性质。当 n< 242 时, 将 S_n 分为两组 $A\cap S_n$ 和 $B\cap S_n$, 则 $A\cap S_n$ 和 $B\cap S_n$ 也都不具

有题中性质。

综上,使得题中条件成立的最小 n 值为 243。

以上三例的解答过程大体上都可以分成推导和构造两个步骤。后两例为关于集合的最值问题,属离散量的最值问题的范畴,其中推导部分是论证所讨论的离散量的集合具有何种性质,由此获得上界或下界;构造步骤通常是找出一个实例,以说明该量的最大(最小)值即是所获得的上(下)界。下面再看集合的特殊子集的元素计数问题。

[例 3-123] 设 S 是数集合{1, 2, 3, …, 1989}的一个子集,且 S 中任意两个数的差不等于 4 或 7,问 S 最多可以包含多少个数?

解: 1, 4, 6, 7, 9 这五个数中任何两个的差都不是 4 或 7。各加 11 得 12, 15, 17, 18, 20,显然也是这样的数,而且各与前 5 个数中任一个的差也不是 4 或 7,这样类推,每次连续十一个数中可取五个,一起组成集合 S。(注意 $1989=11\times180+9$,最后只有九个数 1981, 1982, …, 1989,但仍可取五个数 1981, 1984, 1986, 1987, 1989)。那么 S 包含的数的个数是 $5\times181=905$。

再证 S 中不可能包含更多的数。若不然,则上述 181 组数中至少有一组可从中取六个数,使得两两的差不是 4 或 7。不妨考虑 1, 2, …, 11 这组数,把它们划分成五个小组: (4, 7, 11), (3, 10), (2, 6), (5, 9), (1, 8),其中至少要求有一个小组要取出两个数。显然后面四对数的每一对都不能同时取出,只能在第一小组中取 4, 7,于是(3, 10)中只能取 10, (2, 6)中只能取 2, (5, 9)中只能取 5, (1, 8)中两个数都不能取,也就是说不可能取得第六个数,从而得证。

2．集合的划分

将一个给定的集合 P 分拆成若干个非空真子集 $P_i(i=1, 2, \cdots, n)$，使得 $P_i \cap P_j = \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$ $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$，则称 $P_i(i= 1, 2, \cdots, n)$ 为集合 P 的一个划分。

集合的划分问题是近年来国内外较高层次的数学竞赛中的热门试题之一。

[例 3-124] (第 29 届 IMO 预选题) 设 k 为正整数，M_k 是 $2k^2+k$ 与 $2k^2+3k$ 之间(包括这两个数在内)的所有整数所组成的集。能否将 M_k 分拆为两个子集 A, B，使得

$$\sum_{x \in A} x^2 = \sum_{x \in B} x^2 \qquad ?$$

解：先从特殊情况入手。

$k=1$ 时，$M_1=\{3, 4, 5\}$，而 $3^2+4^2=5^2$。

$k=2$ 时，$M_2=\{10, 11, 12, 13, 14\}$，而

$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2=365$

于是，从 k 的这两个特殊值的情况诱发我们猜想 M_k 中前 $k+1$ 个数的平方和与后 k 个数的平方和相等，这个猜想是正确的。事实上

$$(2k^2+2k+1)^2+(2k^2+2k+2)^2+\cdots+(2k^2+3k)^2-(2k^2+k)^2-(2k^2+k+1)^2-\cdots-(2k^2+2k)^2=$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\{(2k^2+2k+1+j)^2-(2k^2+k+j)^2\}-(2k^2+2k)^2$$

$$=(k+1)\sum_{j=0}^{k-1}(4k^2+3k+2j+1)-(2k^2+2k)^2=(k+1)\{(4k^2+3k)k+k^2\}-(2k^2+2k)^2=4k^2(k+1)^2-(2k^2+2k)^2=0,$$ 得证。

此例通过特殊情况分析发现结论是本质的,至于结论的证明只是一个验证性任务。

[例 3-125]　(第 31 届 IMO 预选题)试确定所有的正整数 k,使得集合

$$X=\{1990, 1991, \cdots, 1990+k\}$$

可以分成两个不相交的子集 A 与 B 的并集,且 A 中元素之和等于 B 中元素之和。

解: 设正整数 k 使得

$$X=\{1990, 1991, \cdots, 1990+k\}$$

可以分成满足命题要求的子集 A 与 B,则 X 中所有的元素之和必是偶数,即

$$\sum_{j=0}^{k}(1990+j)=1990(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}$$

是偶数。于是 $k(k+1)\equiv 0 \pmod 4$,由此可知,只能有 $k\equiv 0 \pmod 4$ 或 $k\equiv 3 \pmod 4$。

(i) 若 $k\equiv 3 \pmod 4$,则 $4|(k+1)$,故可把 X 中的数从 1990 起每四个相继整数中的最小者与最大者划归 A,另外两个居中的数划归 B,这样得到的 A, B,显然满足命题要求。

(ii) 若 $k\equiv 0 \pmod 4$,可令 $k=4m$,用 $|X|$, $|A|$, $|B|$ 分别表示 X, A, B 的元素个数,因 $|X|=4m+1$ 是奇数,故 $|A|\neq|B|$,不妨设 $|A|>|B|$,于是 $|A|\geq 2m+1$, $|B|\leq 2m$。这样一来,A 中的元素之和就不小于 $\sum_{j=0}^{2m}(1990+j)$; B 中的元素之和就不大于 $\sum_{j=2m+1}^{4m}(1990+j)$。由此即得

$$\sum_{j=0}^{2m}(1990+j)\leq\sum_{j=2m+1}^{4m}(1990+j)$$

于是 $2m^2 \geq 995$，故 $m \geq 23$，$k \geq 92$。

下面我们来证明，当 $k \equiv 0 \pmod 4$ 且 $k \geq 92$ 时，X 存在满足命题要求的子集 A 与 B。事实上，当 $k = 92$ 时，可令 $A_1 = \{1990, 1991, \cdots, 1990+46\}$，$B_1 = \{1990+47, 1990+48, \cdots, 1990+92\}$，由于 A_1 的元素之和小于 B_1 的元素之和，其差为 126，因此 A_1 与 B_1 不符合命题要求。然而，我们可以调整它们的元素，使这种差缩小为 0。例如，对换 A_1 中的 1990 与 B_1 中的 2053，所得的集合 A 与 B 是满足命题要求的。当 $k > 92$ 时，我们仍将

$$1991, 1992, \cdots, 2036, 2053$$

划归 A，将

$$1990, 2037, \cdots, 2052, 2054, \cdots, 2082$$

划归 B，然后对从 2083 起的其余的 $k-92$ 个数，每相继的四个依(i)中所述的方法分别划归 A 和 B。由于 $k \equiv (\bmod 4)$，故 $4 \mid (k-92)$，因而上述方法将这 $k-92$ 个数全部归入 A 和 B。显然，这样的 A 和 B 是符合命题要求的。

综上所述，当且仅当正整数 k 满足条件 $k \equiv 3 \pmod 4$ 时，或者满足条件 $k \equiv 0 \pmod 4$ 且 $k \geq 92$ 时，k 是符合命题要求的。

[例 3-126]　(1978 年罗马尼亚竞赛试题) 集合 X 划分为两两不交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，又划分为两两不交的子集 $B_1, B_2, \cdots, B_n$。已知任意两个不交的子集 A_i 与 B_j 的并集 $A_i \cup B_j$ 至少含有 n 个元素，$1 \leq i, j \leq n$，证明：集合 X 的元素个数至少为 $\frac{n^2}{2}$。它能否等于 $\frac{n^2}{2}$？

证明：不失一般性，不妨设集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2,$

$\cdots, B_n$ 中元素个数最少的集合为 A_1, A_1 含有 k 个元素, 由于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不交, 因此 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中使 $A_1 \cap B_j \neq$ 的集合至多有 k 个。不妨设集合 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 满足 $A_1 \cap B_j \neq$, 其中 $m \leq k$。集合 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 都至少含有 k 个元素, 因此它们的并至少含有 mk 个元素。

因为当 $j = m+1, \cdots, n$ 时, $A_1 \cap B_j =$, $A_1 \cup B_j$ 至少含 n 个元素, 所以集合 $B_j(j = m+1, \cdots, n)$ 都至少含有 $n-k$ 个元素。因此整个集合 $X = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ 中至少有 $l = mk + (n-k)(n-m)$ 个元素。

如果 $k \geq \frac{n}{2}$, 则集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中每一个都至少含有 $\frac{n}{2}$ 个元素, 而 $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 中所有元素个数至少为 $n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$。

如果 $k < \frac{n}{2}$, 则由 $m \leq k$ 得到

$$l = n(n-k) - m(n-2k) \geq n(n-k) - k(n-2k)$$
$$= 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \geq \frac{n^2}{2}。$$

下面再给出集合 X 恰含有 $\frac{n^2}{2}$ 个元素的例子。设 n 为偶数, 且 $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 是把集合 X 划分为 n 个两两不交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 并且每个子集 A_i 恰含 $\frac{n}{2}$ 个元素。令 $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \cdots, B_n = A_n$, 则题中所有条件都满足。

[例 3-127] (第 5 届冬令营试题) 设 X 是一个有限集合, 法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E(偶数个元素组成的子集)都对应一个实数 $f(E)$, 且满足条件:

① 存在一个偶子集 D，使得 $f(D)>1990$；

② 对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A,B，有 $f(A\cup B)=f(A)+f(B)-1990$

求证：存在 X 的子集 P 和 Q，满足

(i) $P\cap Q=$ ，$P\cup Q=X$；

(ii) 对 P 的任何非空偶子集 S 有 $f(S)>1990$。

(iii) 对 Q 的任何偶子集 T 有 $f(T)\leq 1990$。

证明：因为 X 只有有限个偶子集，所以必有偶子集 U 使得 $f(U)$ 达到最大值。这样的 U 可能不止一个。取使 f 达到最大值的偶子集中元素最少的一个作为 P（若这样的集合不止一个，则任取其一），然后取 $Q=X\setminus P$。显然有 $P\cap Q=$ ，$P\cup Q=X$。下面证明 P 与 Q 满足题中的要求(ii)和(iii)。

因为 $f(D)>1990$，所以最大值 $f(P)>1990$。再来考察 P 的任何一个非空的真偶子集 S。因为

$$f(P)=f(S\cup(P\setminus S))=f(S)+f(P\setminus S)-1990,$$

而 $P\setminus S$ 是偶子集且元素数少于 P，所以

$$f(P\setminus S)<f(D)$$

$$f(S)-1990=f(P)-f(P\setminus S)>0$$

即 $f(S)>1990$，(ii)成立。

对于 Q 的任何偶子集 T，显然 $f(T\cup P)$ 不能超过最大值 $f(P)$，于是由

$$f(T\cup P)=f(T)+f(P)-1990$$

可得 $f(T)-1990=f(T\cup P)-f(P)\leq 0$，即 $f(T)\leq 1990$，(iii)成立。

说明：本题的结论①是要求将 X 表示成 $X=P\cup Q$ 且 $P\cap Q=$ ，这实质上是对 X 进行划分，不过本题还要求这个划

分满足(ii),(iii)。利用极端原理我们找到了 P,从而确定了这个划分,这是解题的关键所在。

[例 3-128] (第 31 届 IMO 预选题)设 r 是任意一个自然数,若将全体自然数所成的集 N 分拆成 r 个两两不相交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_r$: $N = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$,则在这些子集中必存在某个子集 A,具有性质(*),存在 $m \in N$,使得对任何正整数 k,都能找到 $a_1, a_2, \cdots, a_k \in A$,满足 $1 \le a_{j+1} - a_j \le m$, $j = 1, 2, \cdots, k-1$。

证明:为了证本命题,我们考虑 N 的一种特殊的子集。若 N 的子集 P 包含有任意有限长度的相继自然数段,则称 P 为 N 的"长子集"。我们将证明一个加强的命题(Ⅰ):若将 N 的长子集 P 分拆成 r 个两两不相交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_r$,则这些子集中必存在某个子集 A 具有性质(*)。

先用数学归纳法证明命题(Ⅰ)。当 $r=1$ 时,命题(Ⅰ)显然成立。设 $r=n$ 时,命题(Ⅰ)成立,考察 $r=n+1$ 时的情形。

设长子集 P 分拆成 $n+1$ 个两两不相交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1}$, $P = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}$,记 $Q = A_1 \cup \cdots \cup A_n$。若 Q 是 N 的长子集,则由归纳假设知,命题(Ⅰ)已经成立,若 Q 不是长子集,则存在某正整数 m_1,使得 Q 不包含任何相继的 m_1 个自然数,由于 P 是 N 的长子集,因而对于任意给定的 k,集 P 必定含有长为 km_1 的连续自然数段,将这个自然数段分成 k 小段 $P_1, P_2, \cdots, P_k$,每小段恰有相继的 m_1 个自然数,由于 Q 不包含长为 k 的相继自然数段,因此对于每个 $P_i(1 \le i \le k)$ 都至少存在一个 $a_i \in P_i$,但 $a_i \notin Q$,因 $a_i \in P$,故必有 $a_i \in A_{n+1}$,这样,我们已有$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ A_{n+1}。显然这样确定的 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 必满足 $1 \le a_{j+1} - a_j \le 2m_1$ $j = 1, 2, \cdots, k$。这就证

明了当 $r=n+1$ 时，命题(Ⅰ)也成立，由数学归纳法即知，命题(Ⅰ)对任何自然数 r 成立。

由于 N 也是它自身的长子集，于是由加强的命题(Ⅰ)即知原命题成立。

习　题　3.9

1．设 $n\geq 15$ 是自然数，A，B 都是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的真子集，$A\cap B=$ ，且 $\{1, 2, \cdots, n\}=A\cup B$。证明：$A$ 或者 B 中必有两个不同的数的和为完全平方数。

2．能否给出集合 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 1989\}$ 的一个划分(S_1, S_2, S_3, S_4)，使得 S_1, S_2, S_3, S_4 中各数之和组成一个公差为 10 的递增等差数列?

3．设 p 是自然数，$n=2^p$，考虑 $E=\{1, 2, \cdots, n\}$ 具有下述性质的子集 A：如果 $x\in A$，那么 $2x$ ú A，求这样的一个子集 A 的元素个数的最大值(1991 年法国竞赛试题)。

4．将正整数集分拆为两个不相交的子集 A，B，满足条件(i) $1\in A$；(ii) A 中设有两个不同的元素，它们的和形如 2^k+2($k=0, 1, 2, \cdots$)；(iii) B 中也设有两个不同的元素具有上述形式的和。证明这个分拆可以以唯一的方式实现。确定 1987，1988，1989 所属的子集(第 29 届 IMO 预选题)。

3.10　凸包原理及应用

凸包是组合几何中讨论以几何元素为元素的集合的结构及其性质的一个重要工具，灵活运用它可以解决形形色色的组合几何方面的竞赛试题。

1. 凸包的相关概念及基本结论

定义 3.1　如果对于点集 G 中任意两点 A, B, 线段 AB 上的每一点都属于点集 G, 那么我们称这样的点集 G 为凸集。

显然, 线段、直线、射线、圆、整个平面都是凸集, 空集、一点也都是凸集。

定理 3.6　两个凸集的交是凸集。

推论: 任意多个凸集的交是凸集。

(注意两个凸集的并不一定是凸集, 例如, 两个相离的圆。)

定义 3.2　一个有界闭集, 如果是凸集就称为凸图形。

(例如, 线段、三角形、梯形、圆、椭圆等都是凸图形。)

定义 3.3　包含图形 G 的最小凸图形称为图形 G 的凸包。

(通常一个有限点集的凸包是线段或凸多边形。)

关于凸包, 有下面重要性质:

定理 3.7　有限点集 F 的凸包由 F 中所有有限个点的凸包合并而成。

定理 3.8　由 $n(n\geq 3)$ 个点组成的点集 F, 若无三点共线, 则它的凸包是凸多边形。

(定理 3.8 就是组合数学中著名的 Erd s-Szekers 定理, 是解决许多与平面点集有关的问题的依据。下面仅给出定理 3.8 的证明。)

证明: $n=3$ 时, 命题显然成立。

假设 $n=k$ 时命题成立, 现考察 $n=k+1$ 的情形, 任取平面上一点 P, 设 A_1 是 F 中距 P 最远的一点, 连 PA_1 并过 A_1

作直线 l 垂直 PA_1, 则 F 中其余点与 P 均位于 l 的同一侧, 由于无三点共线, 故可让 l 绕 A_1 逆时针方向旋转, F 中所最先遇到的点记作 A_2, 最后遇到的点记为 A_3, 那么 F 中所有的点均在 $\angle A_2A_1A_3$ 内及其两边上, 如图 3.64 所示。连 A_2A_3, 如果 F 中的其余点均在 $\triangle A_1A_2A_3$ 内, 则 $\triangle A_1A_2A_3$ 即为所求。否则, 必有一部分 F 中点位于 $\triangle A_1A_2A_3$ 外。对 F 中除 A_1 外 k 个点使用归纳假设, 知它们存在凸包多边形。而由 A_2, A_3 性质知道, 这两点一定是该凸多边形的顶点。于是 A_2A_3 为该凸多边形的一条边或一条对角线。不论哪种情形, 我们保留上述凸多边形位于 $\triangle A_1A_2A_3$ 以外部分, 再补充 A_2A_1, A_3A_1 两条边, 使其成为一个新的凸多边形, 新的凸多边形即为 F 的凸包。综上命题获证。

图 3.64

由于由 5 点构成的点集是平面有限点集中简单而又富有代表性的情形, 其中浓缩着许多重要的信息, 往往成为解决复杂点集问题的基础和工具。关于五点集, 有下面十分常用的克莱因(E. Klein)定理。

定理 3.9 平面上任给 5 个点, 其中任何三点都不共线, 那么必有 4 点是凸四边形的顶点。

证明: 设这五点为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 考虑这 5 点的凸包, 由定理 3.8 有下面三种情况:

(i) 凸包为凸五边形, 则其中任意 4 点可构成凸四边形。

(ii) 凸包为凸四边形, 比如是凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$, 则此 4

点即为所求。

(iii) 凸包为三角形，设 A_4，A_5 在$\triangle A_1A_2A_3$ 之中，如图 3.65，则直线 A_4A_5 只能与三角形的两条边相交，比如与边 A_1A_2，A_1A_3 相交，则 $A_2A_3A_5A_4$ 为凸四边形。

图 3.65

2. 凸包在解数学竞赛题中的应用

[例 3-129] (第 10 届 IMO 试题)在平面上给出了 n 个点($n>4$)，现知其中任意 3 点不共线，证明：至少存在 C_{n-3}^2个以上述点为顶点的四边形。

证明：若 $n=5$，则直接由定理 3.9 知，此题的结论成立。

若 $n>5$，则自 n 个点中任意取出 5 个点来，其中都有某 4 个点构成凸四边形。所以，连同重复计算在内，至少有 C_n^5 个凸四边形。但因每个这样的凸四边形的 4 个顶点都可归属于 C_{n-4}^1个不同的 5 点集，所以每个凸四边形，最多可能重复计算了 $C_{n-4}^1=n-4$ 次，故知不同的凸四边形的个数不会少于 $C_n^5/(n-4)\geq C_{n-3}^2$个，证毕。

[例 3-130] (第 12 届 IMO 试题)在平面上给出 100 个点，其中任何 3 点不共线，考虑以上述点为顶点的所有可能的三角形，证明：其中至多只有 70% 的三角形可能是锐角三角形。

证明：先考虑 5 点组的情形。对于 5 点组，我们有结论：

平面上任给 5 点，没有三点共线，则至少存在三个以上述点为顶点的非锐角三角形(证略，留给读者练习)。

对于 100 个点，共有 C_{100}^5个不同的 5 点组，每个 5 点组中

都至少有 3 个非锐角三角形。但每个非锐角三角形的 3 个顶点都可归属于 C_{97}^{2} 个不同的 5 点组，所以最多都可能被重复计算了 C_{97}^{2} 次，因此，在这 100 个点为顶点的若干三角形中，至少有 $3C_{100}^{5}/C_{97}^{2}$ 个非锐角三角形。容易算出它们至少占三角形总数 C_{100}^{3} 的 30%。所以，其中锐角三角形所占的比例不会超过 70%，证毕。

[例 3-131]　(1967—1968 年波兰数学竞赛试题)在平面上有 n 个点($n\geq 4$)，其中任意四个点都可以组成一个凸四边形的顶点，证明：这 n 个点组成一个凸 n 边形的顶点。

证明：对于给定的 n 个点，存在这 n 个点的凸包。由于无三点共线，根据定理 3.7，所以它们的凸包是一个凸多边形。

假设 n 点中某点(不妨设为 A)不是凸包多边形的顶点，则 A 位于这个凸包多边形的内部或者边上。这时由该多边形的顶点引出的对角线可将其分割成若干个小三角形，点 A 必属于某个三角形，点 A 及此三角形顶点不可能成为同一凸四边形的顶点，导致矛盾，所以，凸包多边形恰是以这 n 个点为顶点的凸 n 边形。

[例 3-132]　在平面上给出 $n\geq 4$ 个点，并且其中任何三点都不在同一条直线上。如果对于其中任意三点均可在已给的 n 点中找出第四个点，这些点构成平行四边形的顶点。证明 $n=4$。

证明：我们考虑已知点的凸包，有两种情况：

(i) 如图 3.66，凸包是平行四边形 ABCD。如果点 M 位于平行四边形 ABCD 内部，那么以 A，B 和 M 为顶点的总共三个平行四边形的第四个顶点位于 ABCD 的外部，矛盾。因此，在这种情况下除了点 A，B，C 和 D 以外，不可能再有其它

点了。

(ii) 凸包不是平行四边形的一个凸多边形。设 AB 和 BC 是凸包的边。作平行于 AB 和 BC 的支撑线。设这两条支撑线分别通过顶点 P 和 Q, 这时, 以 B, P, Q 为顶点的三个平行四边形的第四个顶点位于凸包的外部(如图 3.67)。这些点甚至位于由支

图　3.66

图　3.67

撑线构成的平行四边形的外部, 除非 P 和 Q 是这个平行四边形的顶点。在这种情况下, 它的第三个顶点不在凸包上(这是因为凸包不是平行四边形), 矛盾。

综上便得 $n = 4$。

[例 3-133]　(1986 年上海市高中数学竞赛试题) 已知 A, B, C, D 是平面上两两距离不超过 1 的四个点, 今欲作一圆覆盖此四点(即 A, B, C, D 在圆内或圆周上), 问半径最小应是多少? 试证明之。

解: 设 A, B, C, D 为满足条件的四点, 能覆盖它们的圆的半径为 R。考虑四点的凸包。

(i) 若凸包为三角形，这时 A，B，C，D 四点中有一点，设为 D，在△ABC 的内部或边界上，若△ABC 为锐角三角形，则有一角，设为 $\angle A \geq 60°$，$2R = a/\sin A = 1/\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$，特别地，当 $AB = BC = CA = 1$ 时，$R = \frac{1}{\sqrt{3}}$，比它小的不可能覆盖此四点。若△ABC 为钝角三角形或直角三角形，则以最长边为直径的圆能覆盖四点，故有 $R \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$。

(ii) 若凸包为四边形，设为 ABCD。若有一对对角，设为 $\angle A$，$\angle C$ 均大于 $90°$，则以 BD 为直径的圆即能覆盖此四点，故 $R \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$。若上述情况不发生，四边形 ABCD 四个内角必有一个，如设为 $\angle D \geq 90°$，则 $\angle B < 90°$，又 $\angle A$，$\angle C$ 中至少有一个，不妨设 $\angle A < 90°$，如图 3.68，考察 $\angle 1$，$\angle 2$，并不妨设 $\angle 2 \geq \angle 1$，若 $\angle 2 \geq \angle 1 \geq 90°$，以 AB 为直径的圆可覆盖此四点，故 $R \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$。若 $\angle 2 \geq \angle 1$，$\angle 1 < 90°$，D 必在锐角△ABC 外接圆内或圆周上，该圆半径 $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$。

图 3.68

综上所述，覆盖平面上两两距离不超过 1 的任意四点的圆的最小半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$。

[**例** 3-134] (1990 **年第** 31 **届** IMO **预选题**) **设** $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 4)$ **是平面内的** n **个凸集，其中每三个集合有一公共点，求证：必有一个点属于所有的集合。**

证明：用数学归纳法证。(**如图** 3.69)

当 $n = 4$ **时，设点** P_i **是** A_1, A_2, A_3, A_4 **的不含** A_i **的三元子集的公共点。现考虑** P_1, P_2, P_3, P_4 **的凸包，若凸包为四边形** $P_1P_2P_3P_4$，**则线段** P_1P_3, P_2P_4 **相交于** P。**由凸性，线段** P_1P_3

图 3.69　　　　**图** 3.70

$\in A_2 \cap A_4$，**所以** $P \in A_2 \cap A_4$。**同理** $P \in A_1 \cap A_3$，**即** P **为** A_1, A_2, A_3, A_4 **的公共点。若凸包为三角形** $P_1P_2P_3$，**如图** 3.70，P_4 **在** $\triangle P_1P_2P_3$ **内**(**这个三角形可能退化为线段或点**)，**则由凸性，**$\triangle P_1P_2P_3$(**及其内部**) A_4。**所以** $P_4 \in A_4$，**即** P_4 **为** A_1, A_2, A_3, A_4 **的公共点。假设命题对** $n = k$ **时成立。**

那么 $n = k + 1$ **时，令** $B_i = A_i \cap A_{k+1}$，**则** $B_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ **为凸集，并且每三个有公共点**(**因为命题对** $n = 4$ **成立**)。**因此，由归纳假设，**$B_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ **必含有一个公共点** P，**从而** $A_i (i = 1, 2, \cdots, k + 1)$ **有一个公共点。得证。**

注：例 3-134 是凸集理论中著名的海莱定理的一个特例。海莱定理的内容为：若一族有界凸图，图中任意三个都有公共点，则这族图形有公共点。海莱定理的各种特例常被用作数学竞赛试题。

[例 3-135] 求证：单位面积的凸图形内(包括边界)任取五个点，则以这五个点为顶点所构成的 10 个三角形中至少有一个三角形的面积不超过$\frac{2}{5+\sqrt{5}}$，且这个常数是最好的。

证明：记任取的五个点 A，B，C，D，E，若这五个点的凸包为三角形，如图 3.71。则先将△ABC 的顶点与某内部一点 D 连线，不妨设另外一点 E 在△DBC 中，再连接 DE，EB 和 EC，则△ABC 被分成五块。于是至少存在一个三角形的面积$\leq\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}<\frac{2}{5+\sqrt{5}}$。

图 3.71　　　图 3.72

若这五个点的凸包为四边形 ABCD，如图 3.72，则连接 AE，BE，CE 和 DE，四边形的面积被分成四块，于是至少存在一个三角形的面积$\leq\frac{1}{4}S_{ABCD}<\frac{2}{5+\sqrt{5}}$。

若这五个点的凸包为五边形 ABCDE，连接它的所有对

角线,如图 3.73,对角线分别相交于 I, J, F, G, H。不失一般性,不妨设 $\frac{AI}{AC} \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} = k$,否则有 $\frac{AI}{AC} < k$, $S_{\triangle BIJ} / S_{\triangle BCJ} > \frac{1-2k}{k}$,

$$S_{\triangle BIJ} / S_{\triangle BCI} > \frac{1-2k}{1-k} \qquad (3\text{-}135\text{-}1)$$

图 3.73

又因 $BJ/BD < k$,得

$$S_{\triangle BDI} / S_{\triangle BIJ} > \frac{1}{k} \qquad (3\text{-}135\text{-}2)$$

由(3-135-1)式乘以(3-135-2)式,得

$$S_{\triangle BDI} / S_{\triangle BCI} > (1-2k)/k(1-k) = 1$$

于是 EB 的延长线与 DC 的延长线相交,这与对称相悖。因此不妨设 $AI/AC > k$。

记△EAB, △ABC, △CDE 和△DEA 中面积的最小者为 S,则

$$S_{ABCDE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} + S_{\triangle ACD} \geq 2S + S_{\triangle CDI}/(1-k) \geq \left(2 + \frac{1}{1-k}\right) S = \frac{5+\sqrt{5}}{2} S$$

即有 $$S \leq \frac{2}{5+\sqrt{5}} S_{ABCDE} \leq \frac{2}{5+\sqrt{5}}$$

当凸图形为正五边形,而 A, B, C, D, E 就取在它的顶点处,则以这五个点为顶点所构成的 10 个三角形中,最小的面积是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{2}{5+\sqrt{5}}S_{ABCDE}=\frac{2}{5+\sqrt{5}}$$

故这个常数$\frac{2}{5+\sqrt{5}}$是最好的。

习　题　3.10

1. 平面上给定5点,没有三点共线,则至少存在三个以上述点为顶点的非锐角三角形。

2. 平面上有四个圆,其中任何三个圆面都有公共点,求证:这四个圆必有公共点。

3. 在平面上任取6个相异点,求证:两两连接这些点所得的线段中,最大者与最短者之比 $\lambda\geq\sqrt{3}$(1966年波兰竞赛试题)。

4. 在平面上给定 n 个点,同时任意三个点都可以被半径为1的圆覆盖,证明:所有 n 个点可以被半径为1的圆盖上。

5. 设 A, B 是平面上的两个有限点集,无公共元素,且 $A\cup B$ 中任意3个不同点都不共线。如果 A, B 中至少有一个的点数不少于5个,证明存在一个三角形,它的顶点全在 A 中或全在 B 中,它的内部没有另一个集合中的点。

3.11　数学竞赛中的图论方法

近年来,国内外数学竞赛的一个重要趋势是:离散数学在试题中所占的比例越来越大。而图论方法是把离散数学问题抽象为一个数学模型的常用方法,因此越来越多地出现需要运用图论知识和方法来解答的试题。

本节介绍图论的基本概念,并用图论方法处理一些典型问题。

1. 图

图论研究的对象是图,什么是图呢?图 3.74 就是一个图,它有若干个点 A, B, C, D, 我们称之为顶点,或简称为点。这些顶点中有一些是用直线(段)或曲线(段)连结的,我们把这些直线(段)或曲线(段)称为边。

图 3.74

一般地,由若干不同的顶点与连结其中某些顶点的边所组成的图形称为图。稍严格一点可表述为: 记顶点集 $V_{(G)}=\{v_1, v_2, \cdots, v_P\}$, E 为相应的边集 $E_{(G)}=\{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$, 那么集 $V_{(G)}$ 和 $E_{(G)}$ 构成的一个二元组 $(V_{(G)}, E_{(G)})$ 称为图,记作 $G=(V, E)$。并用©G©¦表示 G 中顶点数, $\|G\|$ 表示 G 中的边数。

在图的定义中,顶点的位置以及边的曲直长短都是无关紧要的,而且,也没有假定这些点、边都要在一个平面中。我们只关心顶点的多少及这些边是与哪些顶点连结的。对于某一条边所连结的两顶点称为这条边的端点。两个顶点之间若有边相连,则称这两个顶点是相连的。两条边有一个公共端点,则称这两条边是相邻的。

若图中任何两个顶点间至多只有一条边相连,且每一条边的两个端点不同,这样的图称为简单图。本节中所说的图都是简单图。如果对图 $G=(V, E)$ 与 $G'=(V', E')$, 有 $V' V$, $E' E$, 则称 G 是 G 的子图,记作 $G' G$。

我们将与顶点 V 相连的边的数目,也即是由顶点 V 出发的边数叫做顶 V 的度数,记之为 $d(v)$。度数为奇数的点称为

“奇顶点”,度数为偶数的点称为“偶顶点”,度数为零的点又称“孤立点”。由于每一条边都有两个顶点,于是有下面关于度数的重要而又显然的结论成立。

定理 3.10 $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2\|G\|$

推论: 图中奇顶点的个数是偶数。

证明: 令 $V(G)=v_1\cup v_2$,其中 v_1 是 G 中奇顶点集合,v_2 是 G 中偶顶点集合,于是

$$\sum_{v\in v_1} d(v) + \sum_{v\in v_2} d(v) = 2\|G\|$$

由于 $\sum_{v\in v_2} d(v)$ 是偶数,故 $\sum_{v\in v_1} d(v)$ 也是偶数。因 v_1 中顶点皆为奇顶点,所以 $|v_1|$ 必为偶数,得证。

[**例** 3-136] (1957 年匈牙利竞赛试题) 某工厂生产由六种不同颜色的纱织成的双色布。在这个工厂所生产的双色布中,每一种颜色至少和三种其它的颜色搭配。证明: 可以挑出三种不同的双色布,它们含有所有的六种颜色。

证明: 把纱的颜色视为顶点 $v_i(i=1,2,\cdots,6)$,则可把一种双色布对应一条边。不妨设图已含边 v_1v_2。顶点 v_3 出发的边至少有 3 条,故有异于 v_1, v_2 的顶点,不妨设图含有边 v_3v_4。如果图还含有边 v_5v_6,则问题得证,下设 v_5, v_6 间无边联结。

从 v_5 出发的边至少有 3 条,在边 v_1v_2, v_3v_4 的端点中,分别可选一点,比如设为 v_2 和 v_3 与 v_5 有边联结,这样就得到: 图有边 v_2v_5, v_3v_5,可不妨设从 v_5 出发的第三条边为 v_5v_4(若为 v_5v_1,同样讨论,只需把 v_1 记为 v_4,v_2 记为 v_3)。若图中有边 v_6v_1,则 v_6v_1, v_5v_2, v_3v_4 为问题的解。若图中有边 v_6v_4,则 v_6v_4, v_3v_5, v_1v_2 为问题的解。因为从 v_6 出发的边至少有 3 条,且 v_6

与 v_5 不相连,所以上述二种情况必有一种成立。

[例 3-137] (1985 年全国高中联赛试题)某足球邀请赛有十六个城市参加,每市派甲、乙两个队,根据比赛规则每两队之间至多赛一场,并且同一城市的两个队之间不进行比赛。比赛若干天后进行统计,发现除 A 市的甲队外,其它各队已比赛过的场次各不相同,问 A 市乙队已赛过多少场?请证明你的结论。

证明:视队为顶点,若两队赛过,则在相应的两顶点之间联边得图 G,设 A 市甲队对应的顶点为 v^*,则问题等价于:求 A 市乙队相应顶点的度数。因每队至多赛 30 场,所以任一点的度数只能取 0, 1, 2, …, 30 这 31 个数之一。记度为 i 的顶点为 v_i(i= 0, 1, …, 30),则 $V=\{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{30}, v^*\}$。由题设可知 $v-\{v^*\}$中顶点的度数恰分别取 0, 1, 2, …, 30。显然,与 v_{30} 不相邻的顶仅为 v_0,故 v_{30}, v_0 为同市的两个队。去掉 v_0, v_{30},则剩下的点的度各减少 1。于是与上面的讨论同理可得 v_{29}, v_1 为同市的两个队。依次类推,一般地可得,v_i 与 v_{30-i}为同市的队,从而与 v^* 同市的队只能是 v_{15},故欲求的场次为 15,证毕。

上面两例仅用了图的术语和概念,下面再看定理 3.10 的应用实例。

[例 3-138] (第 18 届美国奥林匹克试题)某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛,每人至少上场一次。求证:必有六场比赛,其 12 个参赛者各不相同。

注:我们曾在第二章 2.10 节曾给出例 3-138 的一个证明,这里给出的证明较简单。

证明:作一图 G,20 个顶点代表 20 名成员,14 条边代表

14 场比赛。令各顶点的度为 $d_i(1\leq i\leq 20)$，则有 $d_i\geq 1$，$\sum_{i=1}^{20} d_i = 2\times 14 = 28$。今将每个顶点处各抹去 $d_i - 1$ 条边，这时一条边可能被抹了二次，因此实际抹去的边数 $\leq \sum_{i=1}^{20}(d_i - 1) = 8$。故余下的图 G 中至少还有 6 条边，且 G 中每个顶点的度≤ 1，故这 6 场比赛的参赛者各不相同，证毕。

简单图中，如果每两个顶点之间都有一条边，这样的图称为完全图，有 n 个顶点的完全图记作 k_n。

[例 3-139] (第 33 届 IMO 试题) 给定空间中的 9 个点，其中任何 4 点都不共面。在每一对点之间都连有一条线段，这些线段可染为红色或蓝色，也可不染色。试求出最小的 n 值，使得将其中任意 n 条线段中的每一条任意地染为红蓝二色之一，在这 n 条线段的集合中都必然包含有一个各边同色的三角形。

证明：首先证明：任何一个有 9 个顶点，33 条边的图含有 k_6 子图。

设 9 个顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_9$，则

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_9) = 2\times 33 = 66$$

于是 9 个顶点中至少有 3 个顶点的度为 8(否则，$d(v_1) + \cdots + d(v_9) \leq 2\times 8 + 7\times 7 = 65$)，设 $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 8$，则

$$d(v_4) + d(v_5) + \cdots + d(v_9) = 42,$$

在 $v_3, \cdots, v_9$ 中，至少有一个顶点的度≥ 7，设 $d(v_4)\geq 7$，且设 v_4 和 $v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8$ 都相邻。

$$\text{又 } d(v_5) + \cdots + d(v_8) \geq 42 - 16 = 26$$

故 v_5, v_6, v_7, v_8 中必有一个顶点的度$\geq \frac{26}{4} > 6$，设 $d(v_5) > 6$，则

v_5 必和 v_6, v_7, v_8 中的某一个相邻, 设 v_5 和 v_6 相邻, 则 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 构成 k_6。

又大家熟知, 二染色 k_6, 其中必有一个同色三角形。所以, 对任何一个有 33 条边的 9 阶简单完全图的边二染色, 其中必有同色三角形。

其次, 存在一个有 9 个顶点, 32 条边的图, 把图中的边二染色, 可使图中无同色三角形。把 9 个顶点分成 5 组 $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_7, v_8\}$, $\{v_9\}$, 如图 3.75 所示。若两组间连一实线, 则表示从这两组中任取一点对都连有红线; 若两组间连一虚线, 则表示从这两组中任取一点都连有蓝线, 且每一组内部的点不连线。这个图有 $C_9^2 - 4 = 32$ 条边, 且不存在同色三角形。

图 3.75

故欲求的 n 的最小值为 33。

2. 树

我们从图 G 的某一顶点 v_1 出发, 经过一条边到另一个 v_2, 再经过一条边到第三个顶点 v_3, 如此等等, 最后到达 v_n, 这样一条“旅行路线”可以用这些顶点和边构成的交错序列 $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \cdots e_{n-1} v_n$ 来表示(有时也可简记为 $v_1 v_2 \cdots v_n$), 且 e_i 的端点是 v_i 和 v_{i+1}。这样的一个序列称为图中的一条链; 如果 v_n 就是 v_1, 这条链称之为闭链; 如果 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 n 个不同的顶点, 就称这样的链是一条路; 如果 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 都不同, 而 $v_n = v_1$, 这样的闭链, 称为一个圈; 一条链的长度就是它经过的边的数目, 也就是它经过的顶点数减 1。

一个图中的任意两顶点间都有一条路连结，就称为连通图，连通且没有圈的图称为树。树上度数为 1 的顶叫做叶。只有一个顶的树叫平凡树。

定理 3.11 非平凡树至少有两个叶。

证明：设 P 是非平凡树 T 上的最长的路，假定 P 是从 v_0 开始，最后到达 v_n，则 v_0，v_n 是叶。事实上，由于 T 是连通图，所以 $d(v_0) \neq 0$，$d(v_n) \neq 0$。若 $d(v_0) \neq 1$；则 $d(v_0) \geq 2$，从而至少存在一边 v_0w，w 不在 P 上，不然 T 上有圈，与 T 为树矛盾。这样，P 可延长到 w，与 P 是最长的路矛盾。可见 $d(v_0) = 1$，v_0 是叶；同理可证 v_n 是叶，证毕。

定理 3.12 若 T 是树，则 ‖T‖ = ©T©- 1。

证明：对©T©用归纳法证明。在©T©≤2 时，定理显然成立。现在假设©T©≤k 时，定理成立。那么©T©= k+ 1 时，由定理 3.11，T 上存在一个叶 v_0，把 v_0（从而连同与 v_0 关联的边）从 T 上删除，可得一个树 T′，由归纳法假设，‖T′‖ = ©T′©- 1，而 ‖T′‖ = ‖T‖ - 1，©T′©= ©T©- 1，故 ‖T‖ = ©T©- 1，证毕。

[例 3-140]（第 24 届前苏联奥林匹克试题）n 个点由线段连接着，已知每一点与另外任何一点都有道路相连通，而任何两点都没有两种不同的道路，证明线段总条数为 n- 1。

证明：我们视 n 个点为一个图 G 的顶，线段是边，依题意，G 是连通无圈图，是树，由定理 3.12，边数为 n- 1，即线段总条数为 n- 1，证毕。

定理 3.13 在恰含 n 个顶点和 n 条边的图中至少有一个圈，因此不可能是树。

证明：这 n 条边，n 个顶点的图，总可分成若干个连通子

图,其中至少有一个的边数不少于顶点数,不妨设为 G,由定理 3.12 知 G 不是树,因此 G 中至少有一个圈,证毕。

[例 3-141] (1987 年全国联赛)设 $n>3$,且 n 个乒乓球选手单打比赛若干场后,任意两名选手已赛过的对手恰好都不完全相同。证明:总可以从中去掉一名选手,使得余下的选手中,任意两个选手已赛过的对手仍然不完全相同。

证明:用 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 表示 n 名选手。设结论不成立,即去掉任意一个选手之后,总有两个选手,他们在余下的选手中已赛过的对手完全相同。则对每个 $k=1, 2, \cdots, n$,去掉选手 V_k 之后,总有一对选手 V_i, V_j(可能有 n 对,但只取一对就够了),他们在余下的 $n-1$ 个选手中已赛过的对手完全相同。把 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 看成顶点,并在 V_i 与 V_j 间联一条棱,并编号为 k,于是得到一个图,它含有 n 个顶点和 n 条棱。由定理 3.13,这个图中含有一个圈,设为 $V_{i1}V_{i2}\cdots V_{im}V_{i1}$,且棱 $V_{i1}V_{i2}, V_{i2}V_{i3}, \cdots V_{im}V_{i1}$ 的编号依次为 $k_1, k_2, \cdots, k_m$。选手 V_{i1} 的对手集记作 A_1。因为 V_{i1} 与 V_{i2} 联有棱 k_1,所以选手 V_{i2} 的对手集 A_2 是集合 A_1 中添加或删掉顶点 V_{k1} 得到的。同样选手 V_{i3} 的对手集 A_3 是在 A_2 中添加或删掉顶点 V_{k2} 得到的;…;最后选手 V_{i1} 的对手集 A_1 是在选手 V_{im} 的对手集 A_m 中添加或删掉顶点 V_{km} 得到的。由于 $V_{k1}, V_{k2}, \cdots, V_{km}$ 两两不同,A_1 和 A_1 不可能相同,但它们都是选手 V_{i1} 的对手集,因此 $A_1 \neq A_1$,矛盾,故原结论得证。

下面再看可利用树的概念来解的一个例题。

[例 3-142] 某镇有居民 1000 人,每人每天把昨天听到的消息告诉自己认识的人。已知任何消息只要镇上有人知道,都会经过这样的方式逐渐地为全镇的人所知道。证明可以选

出 90 名代表, 使得同时向他们报告一个消息, 经过 10 天, 这一消息就为全镇的人知道。

分析: 用 1000 个点分别代表居民。两个人互相认识就在相应的两个点间连一条边。

根据题意, 上述图是连通的。如果我们能证明图是 T_{1000} 时命题成立, 那么其它情形时(图中存在圈) 结论显然也是成立的。

如图 3.76, 在树 T_{1000}中, 设 $V_1V_2\cdots V_{n-1}V_n(n\leq 1000)$ 是一条最长路。取 V_{11}作为一个“居民代表”并将边 $V_{11}V_{12}$取消, 这时 T 被分成两棵树。前一棵树中, 每个顶点 V 到 V_{11}的距离不超过 10, 否则自 V 到 V_n 存在比 $V_1V_2\cdots V_{11}\cdots V_n$ 更长的路, 但这不可能。于是, 代表 V_{11}所知道的消息, 前一棵树顶点的所表示的人在 10 天内都能够知道。

图 3.76

对后一棵树, 也有一条最长的路 $V_1'V_2'\cdots V_{m-1}'V_m'$, 这里 $m\leq 1000-11=989$。同样地, 取 V_{11}'作为一个代表并取消边 $V_{11}'V_{12}'$, 再将这棵树再分为两棵树。

这样继续下去, 陆续得出代表 $V_{11}, V_{11}^{(1)}, \cdots, V_{11}^{(88)}$, 每个代表都可以把一个消息在 10 天之内通知他那个“选区”(一棵树) 中的“选民”。

最后剩下一棵树, 至多有 $1000-11\times 89=21$ 个顶点, 在

它的一条最长路上取代表 $V_{11}^{(89)}$，则这棵树的每一个点到它的距离不超过 10。

上述 90 个代表 $V_{11}, V_{11}^{(1)}, \cdots, V_{11}^{(89)}$ 满足要求。

若以上过程中，某一条最长路长度小于 11，就取该路的一个端点作代表，此时代表总数可能小于 90。

3. Euler 图

在图 G 中，$W = v_0e_1v_1e_2\cdots v_{q-1}e_qv_0$ 叫做 Euler 回路，其中 $q = \|G\| \neq 0$，边 $e_{i+1}(i = 0, 1, \cdots, q-1)$ 的端点是 v_i 和 v_{i+1}，$v_q = v_0$，且 $i \neq j$ 时，$e_i \neq e_j(1 \leq i, j \leq q)$。有 Euler 回路的图叫做 Euler 图。

直观地讲，Euler 图就是从一顶出发而每边恰通过一次又能回到出发顶的图。

定理 3.14　当 G 为连通图时，G 为 Euler 图的充要条件是 G 中每个顶的度数都是偶数。

证明：条件的必要性显然成立，下面证明条件的充分性，对 $\|G\|$ 进行归纳证明。每个顶的度数为偶数的连通图其边数最少者为 k_3，这时命题显然成立。现假设对 $3 \leq \|G\| \leq k$ 的图，命题已成立，考虑 $\|G\| = k+1$，因为没有度数为 1 的顶，所以由定理 3.11，G 不是树，假设 C 是 G 上一个圈，把 C 的边从 G 上删除，所得的 G 仍是每个顶的度数都是偶数的。设这个 G 是由无公共顶的连通图 $G_1, G_2, \cdots, G_W$ 组成的，不妨假设前 k 个是非平凡图，后面 W-k 个是孤立点，由归纳法假设，$G_1, \cdots, G_k$ 中分别有 Euler 回路 $W_1, W_2, \cdots, W_k$，于是 $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k \cup C$ 即为 G 的 Euler 回路，证毕。

[例 3-143]　凸 n 边形及 n-3 条在其内不相交的对角线

组成的图形称为一个剖分图。求证：当且仅当 $3\mid n$ 时，存在一部分图是 Euler 图。

分析：先考虑充分性。$n=3$ 时，命题显然成立。假设 $n\leq 3k$ 时，命题成立。当 $n=3(k+1)$ 时，如图 3.77 连 A_1A_3，A_3A_5，A_5A_1，再将凸多边形 $A_1A_5\cdots A_n$ 依要求进行剖分，显然此时凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一欧拉图。

图 3.77　　　　图 3.78

其次，考虑必要性，由定理 3.14 知剖分图是欧拉图当且仅当它的顶点都是偶顶点。$n=3$ 时，命题显然成立。假设 $n\leq k$ 时命题成立，当 $n=k+1$ 时，如图 3.78 剖分后总存在一个以该凸多边形两邻边为边的小三角形。不妨设为 $\triangle A_1A_2A_3$。因 A_1A_3 还是令一个三角形的两边，且不能是 A_4 或 A_n，否则 A_1 或 A_3 为奇顶点，不可能。故存在某顶点 $A_i(4<i<n)$ 构成 $\triangle A_1A_3A_i$，从而 $n\geq 6$。此时，凸多边形 $A_3A_4\cdots A_i$ 与 $A_iA_{i+1}\cdots A_nA_1$ 的每个顶点仍都是偶顶点。根据归纳假设

$3\mid i-2$，　$3\mid n-i+2$，$\therefore 3\mid n$。得证。

[例 3-144]　(1964 年波兰竞赛试题) 在圆上任取 $n>2$ 个点，把每个点用线段与其余各点相连接，能否一笔画出所有这些线段，使第一条线段的终点与第二条线的起点相重，第二

条线段的终点与第三条线段的起点相重,等等,最后一条线段的终点与最初一条线段的起点相重合?

解:以这 n 个点为顶,以这些线段为边构成一个连通图 G。当 n 为奇数时,G 的每个顶都是偶数度数,由定理 3.14,回答是肯定的。当 n 是偶数时,回答是否定的。

[例 3-145] (哥尼斯堡七桥问题)从图 3.79 中 A, B, C, D 四块陆地中任一块出发,通过每桥恰好一次,再返回出发点是否可能?

图 3.79　　　　图 3.80

分析:伟大的数学家欧拉采用了这样的解决方法:将两个岛和两岸 C, B 用点表示,再在相应的两个点之间连一条线表示连结两地的一座桥,则得图 3.80,再分析图 3.80 能否一笔画,便得到了问题的解。

解:对于连通图 3.80,其中顶 B 的度数为 3,故由定理 3.14 图 3.80 中不存在 Euler 回路,因此不能一笔画,也就是问题的答案是否定的。

4. 平面图

一个图 G 的图可以画在平面上,且使它的任何两条边都

不(在非顶点)相交,则称 G 为平面图;这种图示叫做 G 的平面嵌入;平面嵌入把平面划分成的每个区域叫做平面图的一个面。

定理 3.15 G 是连通平面图,则有 Euler 公式

$$|G| - \|G\| + \quad = 2$$

其中 是 G 的面数。

证明: $= 1$ 时, G 为树, Euler 公式成立。现在假设 $\leq n$ 时 Euler 公式已成立,考虑 $= n+1(n\geq 1)$,因为这时 G 有圈,所以我们从某圈上删除一条边 e 可得连通图 G',在 G 中被 e 隔开的两个面在 G 中变成了一个面,由归纳法假设, $|G'| - \|G'\| + \quad = 2$,而 $|G'| = |G|$, $\|G'\| = \|G\| - 1$, $' = \quad - 1$,所以 $|G| - \|G\| + \quad = 2$,证毕。

[例 3-146] (1968 年波兰竞赛试题)对哪些 n,存在 n 条棱的多面体?

解: 以多面体的顶为顶点,以多面体的棱为边,组成一个平面图 G,则 $|G|\geq 4$, ≥ 4。由 Euler 公式, $\|G\|\geq 6$,即无棱数小于 6 的多面体。

四面体是棱数为 6 的多面体。

又因 $2\|G\| \geq 3$,若有 7 条棱的多面体,则 $\leq \frac{14}{3}$,即 $= 4$,于是 $7 = |G| + \quad - 2 = |G| + 2$, $|G| = 5$,但 $= 4$ 时唯一的多面体是四面体,它只有四个顶,与 $|G| = 5$ 矛盾,可见没有 7 条棱的多面体。

考虑 $k\geq 4$,以 k 边形为底的棱锥即 2k 条棱的多面体;把底为 $k-1$ 边形的棱锥上底角处的一个三面角“锯掉一个尖”,得到一个 $2k+1$ 条棱的多面体。总之, $n\geq 6$, $n\neq 7$ 时,有 n 条

棱的多面体。

5．竞赛图

如果一个图的每一条边都规定了方向,那么称这个图为有向图;这种规定了方向的边称为弧。通常将图记为 $G=(v,u)$,其中 v 为顶点集,u 为弧集。在有向图中,从顶 v_i 出发的弧的条数称为该点的出度,记为 $d^+(v_i)$;回到 v_i 点的弧的条数称为该点的入度,记为 $d^-(v_i)$。对有向图,显然有如下性质。

定理 3.16　在有向图中,所有顶点的出度和等于入度之和。

每两个顶之间有且仅有一弧的完全有向图,称之为竞赛图。

[例 3-147]　(第 26 届美国普特南试题) n 个参赛者 P_1, P_2, …, P_n 进行循环赛($n>1$),每个参赛者同其他 $n-1$ 个参赛者都进行一局比赛。假设,比赛结果没有不分胜负的平局出现,w_r 和 l_r 分别表示参赛者 P_r 胜与负的局数,求证:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2=\sum_{i=1}^{n} l_i^2$$

证明:记 n 名选手 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为 n 个顶点,如果选手 P_i 胜 P_j,则作弧(P_i, P_j)。由题设条件则得 G 是一竞赛图。那么 w_r 和 l_r 就分别表示点 P_r 的出度与入度。于是,对于任一点 P_r,都有

$$w_r+l_r=n-1 \quad (r=1,2,\cdots,n)$$

又由定理 3.16 知 $\sum_{i=1}^{n} w_i=\sum_{i=1}^{n} l_i$,故

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2 - \sum l_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(w_i^2 - l_i^2) = \sum_{i=1}^{n}(w_i + l_i)(w_i - l_i)$$

$= (n-1)\sum_{i=1}^{n}(w_i - l_i) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - \sum_{i=1}^{n} l_i\right) = 0$, 证毕。

此例说明了竞赛图 G 中出度的平方和等于入度的平方和。

[例 3-148]　(1955 年匈牙利试题) 每一个参加循环赛的人和所有其余参加比赛的人都要比赛一次, 而且任何一次比赛都没有出现平局。证明: 这些运动员中, 可以找到这样的运动员, 当他列举被他战胜的人及他的手下败将所战胜的人时, 他能数出所有其他参加比赛的人。

分析: 把循环赛对应于一个竞赛图。本题的结论是, 求证存在一个顶点, 它用至多是长为 2 的有向路可到达其余各点。显然, 从某个顶点 V 出发的弧(长为 1 的路) 的终点集合, 就是 V 的“ 手下败将 ”的集合。

证明: 把循环赛对应于一个竞赛图, 设其出度最大的顶点为 A(不一定唯一)。记 $N^+(A)$ 为由 A 出发的弧的终点之集, 若本题结论为假, 则必存在 $B \neq A$, $B \notin N^+(A)$, 且对每一点 $u \in N^+(A)$ 都有(B, u), 于是 $d^+(B) \geq d^+(A) + 1$, 这与 A 是出度最大的点矛盾! 证毕。

上例实际上证明了下面一个较一般的定理。

定理 3.17　竞赛图中必存在这样的顶点(以下简称“ 优点 ”) 使得从这一顶点出发, 通过长最多为 2 的有向路可以到达其它所有顶点。竞赛图中出度最大的点便是优点。

[例 3-149]　(1987 年第二届冬令营试题) 某次体育比

赛，每两名选手都进行一场比赛，每场比赛一定决出胜负，通过比赛确定优秀选手，选手 A 被确定为优秀选手的条件是：对任何其它选手 B，或 A 胜 B，或存在选手 C，C 胜 B，A 胜 C。如果按上述规则确定优秀选手只有一名，求证：这名选手胜所有其他选手。

分析：这里的优秀选手即优点。本题即要证明：若竞赛图的优点是唯一的，则它到别的顶点有长为 1 的有向路。

证明：设有 n 名($n>1$)选手参赛，循环赛对应于竞赛图 T。设 A_0 是唯一的优点。若本题的结论不真，则必存在 $A_i\neq A_0$ 且 $A_iA_0\neq 0$。又设具备这一性质的所有点所成之集 $S_r=\{A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ir}\}r\geq 1$，由定理 3.17，$S_i$ 所成的竞赛图中必存在一优点，不妨设点 A_{i1}。由于有(A_{i1},A_0)，故 A_{i1}到除 S_r 外的其余 $n-r$ 个点也有不大于 2 的有向路，于是 A_{i1}亦是 T 的优点，这与 A_0 是唯一优点矛盾！证毕。

定理 3.18　每一个 n 阶竞赛图必有一条长为 $n-1$ 的有向路跑遍所有 n 个顶点(这条路称为竞赛图的生成路或哈密顿路)。

证明：(对点数用数学归纳法)$n=2$ 时结论显然。设对于 n 结论成立。考虑一个有 $n+1$ 个点的竞赛图 T。任取一个顶点，例如 a_0，则由归纳假设 $T-a_0$ 有一条生成路 $P: a_1\to a_2\to\cdots\to a_n$。考察 a_0 与 P 中各点之间的弧：

(i) 若 P 中每个点都有(a_i,a_0) $i=1,2,\cdots,n$，则 $a_1\to a_2\to\cdots\to a_n\to a_0$ 为所求。

(ii) 若非(i)，设 a_i 是 P 中第一个出现(a_0,a_i)的点。当 $a_i=a_1$ 时，$a_0\to a_1\to a_2\to\cdots\to a_n$ 为所求。当 $a_i\neq a_1$ 时，$a_1\to a_2\to\cdots\to a_{i-1}\to a_0\to a_i\to\cdots a_n$ 为所求，证毕。

利用定理 3.18, 极易解决匈牙利的赛题:“在某次竞赛中, 每个局中人与所有别的局中人恰赛过一局, 不存在和局, 求证: 全部局中人可按这样的顺序再排出, 使每名局中人总输给排列中的后一名”。证明留给读者。

习　题　3.11

1. 一次大型会议有 500 名代表参加, 如果每名代表认识的人数为 400, 是否一定能选出 6 名代表, 每两名互相认识?

2. 证明: 如果有 n 个顶点的图 G 不含完全图 k_3, 则当 n 为偶数时, $\|G\|\leq\frac{n^2}{4}$。

3. 九位科学家在一次国际会议上相遇, 他们之中的任意三个人中, 至少有二人会说同一种语言。如果每一位科学家最多只能说三种语言, 试证明: 至少有三位科学家能用同一种语言交谈(美国第七届竞赛试题)。

4. 某次体育比赛共有 $n(n\geq3)$ 名选手参加, 每两名选手都比赛一局, 现知无平局出现, 且每个选手都未能击败所有对手。证明: 其中存在三名选手, 有甲胜乙, 乙胜丙, 丙胜甲。

5. 一个 n 行 n 列的矩阵(数表), 每两行都不完全相同。证明一定可以去掉某一列, 除掉这一列后, 每两行仍然不完全相同。

第 4 章　数学竞赛试题的若干命题策略

随着数学奥林匹克活动的深入发展，数学竞赛的命题研究提到了重要位置。

与常规的考试命题相比，数学竞赛的命题难度大得多，这是因为数学竞赛试题较其它一般试题至少应具备以下几个特点：①构思独特、避免雷同；②解法精巧、不落俗套；③思想深刻、富有余味。

下面通过实例，展示一些数学竞赛试题的创作过程，提出命题的一些基本策略。

1. 从简单问题的推广中产生新题

第 30 届 IMO 主试委员会主席恩格尔教授指出：解题者把难题变成一个个容易的题来求解，命题者通常遵循相反的路线，从一个容易的问题开始，把它转化为一个较难的问题。深入讨论一些简单问题，并尽可能推广它们的结果，正是将容易问题转化为较难问题的一种具体手段，是产生新题的一条重要途径。

美国的一位命题者谈到这样一个实例。平面上有这样一个简单甚至是显然的问题："在正三角形 $\triangle ABC$ 内的任意两点 P, Q，则 $\angle PAQ < 60°$。"将这个问题推广到空间后，便产生了一个中等难度的有趣问题：

题 1　设 P, Q 是正四面体 $ABCD$ 内的任意两点，求证

$\angle PAQ < 60°$。

它被选作美国第三届(1973)数学奥林匹克试题(解答见3.7节)

下面看笔者自己一次命题体会。

在一本教学参考书上出现过这样一个非常简单的问题:"$E_1 = \{(x, y) \mid |y| < |x|, |x| \leq 1\}$, $E_2 = \{(x, y) \mid |y| < x^2, |x| \leq 1\}$,问平面点集 E_1, E_2 有何关系?"

图示 E_1, E_2 后易发现问题的答案是 $E_1 \supseteq E_2$,为创作一个新问题,我们先把其推广为:

设 $E_i = \{(x, y) \mid |y| < |x|^i, |x| \leq 1\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$,则 $E_k \supseteq E_{k+1}$。

这个推广后的问题仍旧是不难的,而且是一个验证性问题。为了增大难度,应设法消去命题思路的痕迹。为此我们将推广结果用一种较隐蔽的形式表述如下:

题2 设 $A_0 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1\}$, $A_i = \{(x, y) \mid |y| < |x|^i\}$ $i = 1, 2, \cdots, n$,图示 $A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$。

略解:设 $E_i = A_0 \cap A_i = \{(x, y) \mid |y| < |x|^i, |x| \leq 1\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$。不难证明 $E_k \supseteq E_{k+1}$,亦即有 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n$,这时

$A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = (A_0 \cap A_1) \cap (A_0 \cap A_2) \cap \cdots (A_0 \cap A_n) = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n = E_1 = \{(x, y) \mid |y| < |x|, |x| \leq 1\}$,再作图便十分容易了。

李成章教授创作第32届IMO的第3题也是从简单问题入手考虑的。他考虑了一个简单问题:"从前100个自然数中任取51个数,其中必有两数互素"的推广,他思考到如果取出的数中有3个、4个或更多的数两两互素,情况又如何呢?通过寻求简捷的证法和技术加工,这个推广后的问题最终变成

了第 32 届 IMO 的试题，达到了成千上万命题者追求的最高境界。这个题目是：

题 3：设 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 280\}$，求最小的自然数 n 使得 S 的每个有 n 个元素的子集都含有 5 个两两互素的数。

解：令 $A_i=\{S$ 中一切可被 i 整除的自然数$\}$ $i=2, 3, 5, 7$，记 $A=A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$，利用容斥原理，容易算出 A 中元素的个数为 216。由于 A 中任取 5 个数必有两个数在同一个 A_i 之中，从而它们不互素，则 $n\geq 217$。

另一方面，令 $B_1=\{1$ 和 S 中的一切素数$\}$，

$B_2=\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$

$B_3=\{2\times 131, 3\times 89, 5\times 53, 7\times 37, 11\times 23, 13\times 19\}$

$B_4=\{2\times 127, 3\times 83, 5\times 47, 7\times 31, 11\times 19, 13\times 17\}$

$B_5=\{2\times 113, 3\times 79, 5\times 43, 7\times 29, 11\times 17\}$

$B_6=\{2\times 109, 3\times 73, 5\times 41, 7\times 23, 11\times 13\}$

易知 B_1 中元素的个数为 60。令 $B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5\cup B_6$，则 B 中元素的个数为 88。从而 $S-B$ 中元素的个数为 192。在 S 中任取 217 个数，由于 $217-192=25$，于是存在 $1\leq i\leq 6$，使得这 217 个数包含 B_i 中的 5 个数，显然这 5 个数是两两互素的。所以 $n\leq 217$。

于是可得 $n=217$。

上面的证明构造性强。要求考生有相当高的数学素质，证明中要求灵活运用容斥原理和抽屉原理，特别在运用抽屉原理时，不是按常规的将全部元素 280 个数分成几个抽屉，而是把有用的数挑出来构造几个抽屉，这就开创了应用抽屉原理的新类型。由此可见，这确是一道高水平的数学竞赛试题。

再看一个实例。

60 年代初期有这样一道简单的试题：在单位正方形内任给 9 点，求证其中至少有三点组成的三角形的面积不超过$\frac{1}{8}$。这个问题被选作 1978 年科大少年班的招考试题。尔后，杨路与张景中两位教授证明了其中的 9 点可减少为 6 点，推证过程中的两个副产品分别被用于 1978 年安徽省数学竞赛试题的第五题和首届冬令营(1986) 试题的第一题。

与这个正方形内 9 点问题平行的另一问题是：在单位面积的三角形内任给 9 点，则至少有 3 点组成的三角形的面积不超过$\frac{1}{4}$。这个问题的解答是非常容易的，只要将△ABC 三边的中点两两连结起来(如图 4.1)，将△ABC 分为四个全等的小三角形，再用抽屉原理便知结论成立。这个问题我们简称为三角形 9 点问题。

图 4.1

三角形 9 点问题作为现时的竞赛试题，似乎还太容易了。为了增大难度，考虑问题是否可以推广，而且希望减少点数能达到同样的结论。尝试后，我们得到了。

题 4　单位面积的△ABC 中给定任意 7 点，求证至少有 3 点组成的三角形的面积不超过$\frac{1}{4}$。

题 4 可简称为三角形 7 点问题，其证明只需如图 4.2 构作三个"抽屉"Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，用抽屉原理和平面几何中的一个结论："任一内接或内含于平行四边形的三角形的面积不超过原平行四边形面积的一半"便可。

三角形7点问题已是一个中等难度的问题了, 如果对其作进一步推广, 即进一步减少点数可得下面难度较高的竞赛问题。

题5　在单位面积的三角形内任给5点, 求证至少有三点组成的三角形的面积不超过$\frac{1}{4}$。

图　4.2

解答提示: 先证平面上的任意5点, 一定存在以其中4点为顶点的凸四边形; 再证任一内含或内接于单位三角形的凸四边形的四个顶点中必有三个顶点组成的三角形的面积不超$\frac{1}{4}$。

不难证明, 5点问题的点数不能继续减少为4, 但能否换一个新的角度比如着眼于结论中不大于$\frac{1}{4}$的三角形的个数改造结论呢? 由此想法可产生更深刻的命题。

题6　单位面积的三角形中任给5点, 则其中必存在两个三点组, 分别以它们为顶点可构成两个面积不大于$\frac{1}{4}$的三角形。

证明: 当这五点的凸包为线段时, 结论显然成立。

当凸包为三角形时, 不妨设此三角形即为$\triangle P_1P_2P_3$, 过P_4, P_5的直线和P_1P_3及P_2P_3相交(图4.3), 则四边形$P_1P_2P_4P_5$为凸四边形, 必有三个顶点构成面积不大于$\frac{1}{4}$的三

角形。若 $S_{\triangle P_1P_2P_5} > \frac{1}{4}$，则 $S_{\triangle P_1P_2P_5} + S_{\triangle P_1P_5P_3} + S_{\triangle P_4P_5P_3} + S_{\triangle P_2P_4P_3} < S_{\triangle P_1P_2P_3} \leq 1$，故 $\triangle P_1P_5P_3$，$\triangle P_4P_5P_3$，$\triangle P_2P_4P_3$ 中还有一个三角形的面积不大于 $\frac{1}{4}$。若 $S_{\triangle P_1P_2P_5} \leq \frac{1}{4}$，同理可证 $\triangle P_1P_2P_4$，$\triangle P_4P_2P_3$，$\triangle P_4P_5P_3$，$\triangle P_1P_5P_3$ 中还有一个三角形的面积不大于 $\frac{1}{4}$。

图 4.3

当凸包为四边形时，不妨设 5 点分布如图 4.4，凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 可找到三个顶点构成面积不大于 $\frac{1}{4}$ 的三角形。又 $\triangle P_1P_2P_5$，$\triangle P_2P_3P_5$，$\triangle P_3P_4P_5$，$\triangle P_4P_1P_5$ 中必有一个的面积 $\leq \frac{1}{4} S_{P_1P_2P_3P_4} < \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}$。

图 4.4

图 4.5

当凸包为五边形时，则其中任何四顶点均可构成嵌入

$\triangle ABC$ 中的凸四边形(图 4.5),这样的凸四边形共有 $C_5^4 = 5$ 个,因而不计重复时,必有 5 个面积不大于$\frac{1}{4}$的三角形,又每个三角形至多重复 2 次,故面积不大于$\frac{1}{4}$的三角形的个数$\geq \frac{5}{2} > 2$,得证。

2. 从陈题的改造中推出新题

改造陈题,推陈出新,是一种广泛使用的方法,也是一条易走的命题捷径。李成章教授指出:"全世界几十个国家,几十年的数学竞赛,成百上千名数学家的辛勤劳动,为我们积累了数千甚至上万道题目,其中新鲜别致的命题思路,巧妙独到的解题方法数不胜数,内容的丰富是任何初等数学与高等数学都无法比拟的。这是数学竞赛命题者取之不尽用之不竭的源泉。"

将旧题的条件和结论作相应的改变,有时可构造出漂亮的新题。

例如,在 1988 年选拔我国参加 IMO 代表队的试题中有一个关于函数迭代的问题:

设 $N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$,试问:是否存在函数 $f: N \to N$,使得对每一个 $n \in N$,都有 $f^{[1989]}(n) = 2n$? 并证实你的回答(其中 $f^{[k]}(n) = f\ \ f^{[k-1]}(n)\ \ , f^{[1]}_{(n)} = f(n)$)。

两年以后,河南师范大学的吴伟朝先生对上述试题增加了一个"严格递增"的条件,将其改为以下形式。

题 7　设 N 为自然数,$K \in N$,如果有一个函数 $f: N \to N$ 是严格递增的,且对每个 $n \in N$,都有 $f(f(n)) = kn$,求证:对

每一个 $n\in N$, 都有

$$\frac{2k}{k+1}n \leq f(n) \leq \frac{k+1}{2}n.$$

解: 由于函数 $f: N\to N$ 是严格递增的, 所以对于任意的自然数 $a\leq b$, 均有

$$f(b)-f(a)\geq b-a$$

从而

$$f(f(f(n)))-f(f(n))\geq f(f(n))-f(n)\geq f(n)-n \qquad (4\text{-}7\text{-}1)$$

已知 $$f(f(n))=kn$$

所以 $$f(f(f(n)))=kf(n)$$

于是(4-7-1) 可写为

$$kf(n)-kn\geq kn-f(n)\geq f(n)-n \qquad (4\text{-}7\text{-}2)$$

由(4-7-2) 立得所证不等式。

修改后的试题出现在 1990 年我国冬令营的选拔赛上, 它与旧题相比不仅彻底地改头换面了, 而且还留有很大的回旋余地, 如增加条件之后, 所说的函数是否一定存在? 存在时是否唯一? 这些问题值得我们去思考。

有时, 抓住陈题的实质, 作一些演变, 便可推出新题。

例如早期的图论著作中有这样一道习题:

给定一个平面上 n 个点的点集, 距离恰好为 1 的点对的数目最多是 $n^{\frac{3}{2}}/\sqrt{2}+n/4$。

在 1989 年第 30 届 IMO 上, 这一习题演变成了一个新题。命题者首先注意到了距离在图论中不是本质的, 所以可以将距离为 1 改为距离相等, 设距离相等的点对的个数记为 Q, 则 $2Q/n$ 就是平面上 n 个点组成的点集中任意一个点与它距

离相等的点的最大个数。为恐难度会陡然增大,命题者又多加了一个实质是多余的条件,从而演变出如下试题。

题 8　平面点集 S 由 n 个点组成,并且①S 中每三个点不共线;②对 S 中任一点 P,至少有 k 个点到 P 的距离相等,证明

$$k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

证明详见 3.4 节。

很容易看到 $\frac{1}{2}+\sqrt{2n}= 2n^{\frac{3}{2}}/\sqrt{2}+\frac{n}{4}/n$,所以题 8 实质上就是原来的习题,但外形彻底改变了,成为一道优秀的竞赛试题。

对一些陈题,赋予应用背景(有时抽去应用背景),常能变化出新的试题。

例如,第 28 届(1965 年)莫斯科数学竞赛中有如下一道试题:

把从 1 到 2n 的所有整数写成一行,然后将每个数加上它所在的位置的顺序号数。证明:这些和数中至少有两个在被 2n 除时的余数相等。

将这道题赋予应用背景,便成了第 29 届(1988)IMO 的预选题。

题 9　有偶数个人围着圆桌讨论问题。休息后,他们未按原先位置入坐,证明: 至少有两个人,在休息前后坐在他们之间的人数相等。

略解:将 2n 个坐位依次编为 1, 2, …, 2n 号,并以 a_k 记原来坐在第 k 号位置上的人休息后所坐的位置号码,于是 a_1, a_2, …, a_{2n} 就是将 1, 2, …, 2n 所写成的一行数字,根据原题知

存在 $i \neq j$, 使 $i + a_i$ 与 $j + a_j$ 被 $2n$ 除的余数相同。不妨设为 $i + a_i \leq j + a_j$, 于是有

$$j + a_j - (i + a_i) = m \cdot 2n, \quad m \in Z$$

由于 $j + a_j$ 和 $i + a_i$ 都是不超过 $4n$ 的正整数, 所以 m 只可能为 0 或 1, 即有

$$j + a_j - (i + a_i) = 0 \quad \text{或} \quad j + a_j - (i + a_i) = 2n$$

在两种情况下, 在第 i 号和第 j 号位置之间同在第 a_i 号和第 a_j 号位置之间所间隔的距离都是相等的, 得证。

由上面的解答可看出, 题 9 与原题实质完全相同。

改造陈题还包括对陈题的推广和加强, 这在前面一节中予以了介绍, 这里从略。值得指出, 对陈题的过难、过烦的推广及无实质性意义的推广, 一般不宜用作竞赛试题。

3. 把已知问题的"平行"结论用作新题

先看一个实例。

1960 年, Zirakzadeh 证明了一个有趣的几何不等式:

设 P, Q, R 分别位于 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, CB 上, 且将 $\triangle ABC$ 的周界三等分, 则

$$QR + RP + PQ \geq \frac{1}{2}(a + b + c) \qquad (*)$$

其中, a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边。

不等式(*)在机械化证明的近期研究中, 引起了广泛的注意。有人注意到, 不等式(*)反映的是内接于 $\triangle ABC$ 且将其周界三等分的三角形 PQR 与原 $\triangle ABC$ 周长之间的关系, 那么"平行"地提出, 这样的两个三角形的面积之间有何关系呢? 通过探讨, 得到了如下有趣的命题:

设 P, Q, R 分别位于△ABC 的 AB, BC, AC 上, 且将其周长三等分, 则

$$S_{\triangle PQR} > \frac{2}{9} S_{\triangle ABC}$$

这是一个新的问题, 可变因素较多, 作为数学竞赛中几何试题似乎难度过高。为此, 加强命题的条件, 即限定 P, Q 在一条边上, 大大降低了难度, 就成了 1988 年全国数学联赛第二试的第二题:

题 10　在△ABC 中 P, Q, R 将其周长三等分, 且 P, Q 在 AB 边上, 求证:

$$S_{\triangle PQR} > \frac{2}{9} S_{\triangle ABC}$$

证明详见 3.3 节。

无疑这是一道十分漂亮的试题!

再看一个例子。

第 31 届 IMO(1990) 上, 前南斯拉夫提供了如下预选题:

设 I 是△ABC 的内切圆圆心, A_1, B_1, C_1 分别为 AI, BI, CI 与△ABC 的外接圆的交点, 求证:

$$IA_1 + IB_1 + IC_1 \geq IA + IB + IC$$

苏化明同志考虑了这个问题的一些“平行”结论, 即将内心分别换为外心, 垂心, 重心, 得到了一系新的有趣不等式, 下面仅列举重心的结果。

题 11　设 G 为△ABC 的重心, A_1, B_1, C_1 分别为 AG, BG, CG 与△ABC 的外接圆的交点, 则有

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 \geq GA + GB + GC$$

其中等号当且仅当△ABC 为正三角形时成立。

证明: **如图** 4.6, **设** AG, BG, CG **分别和**△ABC **的三边** BC, CA, AB **交于** A', B', C' **由三角形重心的性质知**

图 4.6

$AG=2GA'=\frac{2}{3}AA'$。**令各边上中线分别为** m_a、m_b、m_c, **则所证的不等式等价于**

$$AA_1+BB_1+CC_1\geq\frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c)\quad(4\text{-}11\text{-}1)$$

设 $a^2+b^2+c^2=4k^2(k>0)$, **这时由中线长公式** $4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$ **等可得**

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=3k^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

又 $$m_a^2+m_b^2+m_c^2\geq\frac{1}{3}(m_a+m_b+m_c)^2$$

所以 $$4k\geq\frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c)\quad(4\text{-}11\text{-}2)$$

设 $AA_1=M_a$, $BB_1=M_B$, $CC_1=M_c$ **由相交弦定理知** m_a

$(M_a - m_a) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$，将其与等式 $4m_a^2 = 8k^2 - 3a^2$ 联立消去 a 可得

$$M_a = \frac{2k}{3}\left(\frac{k}{m_a} + \frac{m_a}{k}\right) \geq \frac{4}{3}k$$

同理 $$M_b \geq \frac{4}{3}k,\ M_c \geq \frac{4}{3}k$$

故 $$M_a + M_b + M_c \geq 4k \qquad (4\text{-}11\text{-}3)$$

由(4-11-2)和(4-11-3)即得所证不等式(4-11-1)，得证。

题 11 从形式到难度都适合作为数学竞赛试题。

再看一个例子。

1980 年美国威斯康星大学选拔人才测试题中有这样一道试题：

集 A 由 100 个非负整数组成，集 S 由所有形如 $x + y$ 的数组成，其中 x, y 属于 A（允许 $x = y$），问 S 最多可以有多少个数？最少可以有多少个数？试加以证明。

这个题是不难的，只要 A 成等差数集（即 A 中的元成等差数列），S 具有最小基数 199。

这个问题的一个平凡推广是：

设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是一个 n 元数集，任取 A 的 $k(2 \leq k \leq n)$个元素作和，记这些和组成的集为 S，那么当 A 是一个等差数集时，S 的基数最小。

推广后的问题的结论是优美的，但难度不大，且解法和原题没有实质性的变化。因此作为高层次的竞赛试题似乎并不理想。为此，我们考虑这个问题的"平行"结论，将等差数列换为等比数列，有什么结论呢？通过探索，我们得到下题。

题 12　设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是一个 n 元数集，任取 A 的

$k(2\leq k\leq n)$ 个元素作和，记这些和组成的集为 S，那么当 A 是一个等比数集(即 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成等比数列)时，S 的基数最大。

证明：对任意的 $k(2\leq k\leq n)$，不难看出，A 的一切可能的 k 项和共有 F_n^k 项(其中 F_n^k 表示从 n 个元素中每次取出 k 个元素的可重复组合数)，因此 S 的基数 $\leq F_n^k$。

下面证明当 A 为等比数集时 S 的基数 $=F_n^k$。为此只需证明 A 为等比数集时，A 的任何两个不同的 k 项和不相等便可。事实上，设 $A=\{q, q^2, \cdots, q^n\}$(由 A 的元素互异性知 $q\neq 1$)，若

$$q^{p_1}+q^{p_2}+\cdots+q^{p_k}=q^{p_1'}+q^{p_2'}+\cdots+q^{p_k'} \quad (*)$$

其中 $p_i\in\{1, 2, \cdots, n\}$，$p_i'\in\{1, 2, \cdots, n\}$，$i=1, 2, \cdots, k$。不妨设 $p_1=\min\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$，$p_1'=\min\{p_1', p_2', \cdots, p_k'\}$，则由

$$q^{p_1}\text{©}q^{p_1}+q^{p_2}+\cdots+q^{p_k}$$

$$q^{p_1+1}\text{熵}q^{p_1}+q^{p_2}+\cdots+q^{p_k}$$

$$q^{p_1'}\text{©}q^{p_1'}+q^{p_2'}+\cdots+q^{p_k'}$$

$$q^{p_1'+1}\text{熵}q^{p_1'}+q^{p_2'}+\cdots+q^{p_k'}$$

和$(*)$可得 $q^{p_1}=q^{p_1'}$，亦即有 $p_1=p_1'$。再在$(*)$中两边消去相等的项 $q^{p_1}, q^{p_1'}$，同上法可继续证得 $p_i=p_i'(i=2, \cdots, k)$。这就证明了当 A 为等比数集时，A 的任何两个不同的 k 项和不相等，得证。

题 12 已是一个较为标准的数学竞赛问题了。对题 12 还可提出“平行性”问题，如将“A 中 k 个元素作和”改为“A 中 k 个元素作积”，结论怎样，值得我们进一步思考。

提出已知问题的“平行”结论，即把某一属性从一概念转到相联的另一概念，是数学家提出研究课题(或问题)的惯用

手段,从上面三例可看出,它也是我们创作数学竞赛试题的一种基本策略。

4. 把有些问题的"反问题"用作新题

考虑一些问题的"反问题"(不一定是逆命题),是数学研究中提出新问题的又一手法,这种手法也常用于数学竞赛的命题。

如在几何中有这样一个熟知的结论:

任一平行四边形内的三角形的面积不超过平行四边形面积的一半。

这个结论的反问题,即考虑三角形中嵌入平行四边形,则可得下题。

题 13　一个三角形内的平行四边形的面积不超过三角形面积的一半。

题 13 是第 47 届(1984)莫斯科数学竞赛试题(证明详见 3.3 节)。此题源于一个熟知命题的反问题,可能正是其创作的真正背景。

再看一个例子。

在立体几何中有这样一个熟知的结论:

若从四面体某一顶点出发的三条棱两两垂直,则这个顶点所对的三角形一定是锐角三角形。

这个问题的反问题就成了第 11 届(1988 年)奥地利—波兰数学竞赛的试题之一。

题 14　由一点 O 引出三条不共面的射线 l_1, l_2, l_3,求证:如果对不同于 O 的任何三点 $A_1 \in l_1$, $A_2 \in l_2$, $A_3 \in l_3$, $\triangle A_1A_2A_3$ 都是锐角三角形,则 l_1, l_2, l_3 两两互相垂直。

证明：我们只须证明，如果 l_1, l_2, l_3 不两两垂直，则可选取 A_1, A_2, A_3 使△$A_1A_2A_3$ 为钝角三角形便可。

不妨设 l_1 与 l_2 的夹角 $\theta \neq 90°$

① 如 $\theta > 90°$，取定 A_1, A_2，当 A_3 趋近于 0 时，$\angle A_1A_3A_2$ 趋于 θ，因此当 OA_3 充分小时有 $\angle A_1A_3A_2 > 90°$。

② 设 $\theta < 90°$，如图 4.7，记 $\angle A_1OA_3 = \alpha$，$\angle A_2OA_3 = \beta$，则

图 4.7

$$
\begin{aligned}
&A_2A_3^2 - (A_1A_2^2 + A_1A_3^2) \\
&= (y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta) - (x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta) - (x^2 + z^2 - 2xz\cos\alpha) \\
&= 2x(y\cos\theta - x) + 2z(x\cos\alpha - y\cos\beta)
\end{aligned}
$$

取定 x，令 z 充分小，y 充分大（使 $y\cos\theta > x$），可使上式大于 0，即 $\angle A_2A_1A_3$ 为钝角。

5. 从已知问题的新解中衍生新题

已知问题的新解往往蕴含着新的思路，新的途径，新的技巧，时常能衍生出新的问题，下面通过实例予以说明。

1986 年第 1 期的《美国数学月刊》上有这样一个有趣的几何不等式:

设 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边, $\triangle$ 为其面积, α, α, α 是正数, 则

$$\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}a^2+\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}b^2+\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}c^2\geq 2\sqrt{3}\triangle \qquad (*)$$

后来该刊刊有(*)的三个证明, 其中一个是纯初等证明。我们试图用惯性矩不等式

$$\lambda a^2+\lambda b^2+\lambda c^2\geq 4\sqrt{\lambda\lambda+\lambda\lambda+\lambda\lambda}\Delta \qquad (**)$$

其中 $\lambda\in R^+$, $i=1, 2, 3$ 给出新证, 要由(**)证(*), 需证明下面的代数不等式(题 15), 尝试后果然成功。这就衍生出了一个新问题。

题 15　设 α, α, α 是正数, 求证

$$\frac{\alpha\alpha}{(\alpha+\alpha)(\alpha+\alpha)}+\frac{\alpha\alpha}{(\alpha+\alpha)(\alpha+\alpha)}+\frac{\alpha\alpha}{(\alpha+\alpha)(\alpha+\alpha)}\geq\frac{3}{4}$$

略解: 令 $a=\alpha+\alpha$, $b=\alpha+\alpha$, $c=\alpha+\alpha$, 因 α, α, α 是正数, 则 a, b, c 成为某一三角形的三边, 记这个三角形为 $\triangle A'B'C'$, 则

$$\frac{\alpha\alpha}{(\alpha+\alpha)(\alpha+\alpha)}=\frac{(-a'+b'+c')(a'-b'+c')}{4a'b'}\text{等等}$$

利用三角中的基本公式易得

$$(-a'+b'+c')(a'-b'+c')=4\triangle'\mathrm{tg}\frac{C'}{2},\quad ab=\frac{2\triangle'}{\sin C'},$$

于是有

$$\frac{\alpha\alpha}{(\alpha+\alpha)(\alpha+\alpha)}=\sin^2\frac{C'}{2}\quad\text{等等},$$

故所证不等式转化为

$$\sin^2\frac{A'}{2}+\sin^2\frac{B'}{2}+\sin^2\frac{C'}{2}\geq\frac{3}{4}$$

这是三角形中熟知的不等式,得证。

题 15 与第 26 届莫斯科试题:“设 α, α, α 是正数,求证 $\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}\geq\frac{3}{2}$。”相映成趣,但难度稍大。

再看一个实例。1985 年,笔者为华东师大主办的《数学教学》第三期的问题解答栏提供了下面的问题

题 16　设 a, b, c 是正数,求证

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc+a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$

这个不等式是著名不等式 $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ 的一个加强,在中数杂志上引起了一些讨论,其实它的命题背景却产生于对已知问题的新解中。我在向学生讲授瑞典 1983 年的试题:“若 a, b, c 是正数,求证 $abc\geq(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$”时,一个学生提出直接将右边乘出再作差变形的方法。这是一种思路极自然但较烦复的方法,但从发现论的意义上来看,这却是一种成功的方法。在演算这种方法时,发现这个不等式可等价变形为 $a^3+b^3+c^3\geq 3abc+a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$,于是一个新的试题产生了。这一题的证明留给读者。

还看一个实例。

1964 年日本数学家高桥进一步提出了一个未解决的数学问题“在可求长空间闭曲线的五等分点组中,是否存在一组在同一球面上?”。尔后,这个问题被我国数学工作者解决(见《数学进展》第 11 卷第一期),即证明了存在“任意五等分点组不共球的空间闭曲线”。1990 年,安徽省芜湖市的胡安礼老师

给出了该问题的一个纯初等证明，并由此衍生出一个奥林匹克试题，这道试题获得了我国首届数学奥林匹克命题比赛二等奖，他得到的试题如下。

题 17 试证：如下构造的空间曲线 Γ 的任意五等分点组都不在同一球面上。曲线 Γ 的构造：作⊙O，设⊙O 的周长为 l；在⊙O 上取 $\overset{\frown}{AmB}$，使 $\frac{1}{5}l<\overset{\frown}{AmB}$ 的长度 $<\frac{2}{5}l$，并以 AB 为轴将 $\overset{\frown}{AmB}$ 旋转 $180°$ 得 $\overset{\frown}{Am'B}$；在⊙O 上取 $\overset{\frown}{BnC}$，使 $\overset{\frown}{AmB}$ 的长度 $+\overset{\frown}{BnC}$ 的长度 $<\frac{2}{5}l$，并以 BC 为轴将 $\overset{\frown}{BnC}$ 旋转 $\theta(0<\theta<180°)$ 得 $\overset{\frown}{Bn'C}$，由 $\overset{\frown}{Am'B}$，$\overset{\frown}{Bn'C}$，$\overset{\frown}{CrA}$ 组成的曲线便是空间曲线(如图 4.8)。

图 4.8

证明：设 $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ 是曲线 Γ 的任一五等分点组。

由曲线 Γ 的构造知，曲线 Γ 的长度为 l，$\overset{\frown}{AmB}$ 的长度 $>\frac{1}{5}l$，$\overset{\frown}{CrA}$ 的长度 $>\frac{3}{5}l$，故至少有一个分点(不妨设为 A_1) 落在 $\overset{\frown}{Am'B}$ 内，同时至少有三个分点(不妨设为 A_2, A_3, A_4) 落在 $\overset{\frown}{CrA}$ 内(不包括端点)。又由曲线 Γ 的构造知 $\overset{\frown}{Am'B}$ 与 $\overset{\frown}{CrA}$ 在同一平面内，从而 A_1, A_2, A_3, A_4 四点在同一平面内。由平面几何知识知，A_2, A_3, A_4 三点只能确定唯一的圆 O，而 A_1 不在圆 O 上，故 A_1, A_2, A_3, A_4 四点不共圆。于是，A_1, A_2, A_3, A_4 四点

必不共球面,否则过 A_1, A_2, A_3, A_4 的平面与 A_1, A_2, A_3, A_4 所在的球面的截线是圆,即 A_1, A_2, A_3, A_4 四点共圆,矛盾。从而 $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ 不可能共球面,即曲线 Γ 的任意五等分点组都不在同一球面上,得证。

6. 从解题方法的迁移中构思新题

在编拟数学竞赛试题,如我们想着重考察学生运用某种解题方法(或某种解题思想)的能力,不妨寻找一些同类试题,换以数学对象和内容,从而推陈出新,编拟出一些新题。

特级教师王连笑的一次命题实践应该对我们很有启迪。

他首先仔细研究了下面三个解题思路相同的试题:

① 已知两个无穷数列

$a_1, a_2, a_3, \cdots$

$b_1, b_2, b_3, \cdots$

它们的元素都是自然数,并且对于 $i \neq j$,有 $a_i \neq a_j$,$b_i \neq b_j$。求证:存在两个下标 k, t 且 $k < t$,满足 $a_k < a_t$,$b_k < b_t$。(1986 年国家 IMO 集训队试题)

② 平面上放了有限多个圆,假设它们所盖住的面积为 1(它们可能是彼此相交的)。试证:一定可以从这组圆中去掉若干个圆,使得余下的圆互不相交,而且它们可盖住的面积不小于 $\frac{1}{9}$。(第 42 届(1979)莫斯科竞赛试题)

③ 设有 $2n \times 2n$ 的正方形方格棋盘,在其中任意的 $3n$ 个方格中各放一枚棋子。求证:可以选出 n 行和 n 列,使得 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中。(1990 年全国初中联赛试题)

为了节约篇幅,这里仅陈述一下②的解题思路:

解这个题的关键在于，从这组圆中去掉哪些圆，留下哪些圆，为了使得留下的圆的面积最大，当然我们应该尽量留下面积大的圆。于是可以采取这样的操作：因为是有限个圆，当然我们从中能找到一个面积最大的圆，留下这个圆，而去掉与这个圆相交的圆，这样就把这个最大的圆留下来了。从剩下的圆中再找一个面积最大的，再去掉与它相交的圆，就把另一个大圆留下来了。如此继续下去，由于是有限个圆，则进行到某一次之后，留下的各圆都不相交。剩下的工作是计算这些圆所盖住的面积不小于$\frac{1}{9}$。

这三道数学竞赛题虽然各不相同，但解题的思路都是运用极端原理，第一次选最大（或最小）的，然后第二次再选剩下的最大（或最小）的，等等。遵循这种解题思路，换一个数学对象，比如让极端原理在方格阵上施展，王连笑老师就编拟出了这样一个题目：

有一个 $199\times m$ 的方格表，我们把连在一起的 $k\times 1$ 个方格叫做 k-方格链，k 叫链长，$0<k\leq 39$。每一个方格链不能分开。若干个方格链总长为 1990。若每一行都装满方格链，则用 10 行就能装满。由于方格链不能分开，则不一定能保证 10 行装满，证明 12 行可装满。

在这里，“1990”是由竞赛的年号设计的，而 39 这个数据则是由先设计出最少 12 行可以装满，再逆算出来的。

这个题目被命题组改造为下题。

题 18　某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 C_i 名学生（$1\leq C_i\leq 39$，$1\leq i\leq n$）来到体育馆观看球赛，全部学生总数为 $\sum_{i=1}^{n} C_i=1990$。看台上每一横排有 199 个座位。要求同一学

校的学生必须坐在同一横排, 问体育馆最少要安排多少个横排才能保证全部学生都能坐下?

改造后的试题为探索题, 且很有生话趣味。它被用作 1990 年全国联赛的压轴题。

有趣的是题 18 可用上面论及的解题思路来求解(留给读者), 但还存在更简单和巧妙的解法, 这可能是命题者始料未及的。

解; 根据题意每一个横排不一定能满座, 为了使每个横排都尽可能满座应该采用下述方式来安排座位: 先让若干个学校的学生坐第 1 排, 坐到刚刚超过 199 人(即如果抽下一学校第 1 排不超员, 在某种特殊情况下, 也可能正好坐满第 1 排), 某校多余的人不妨让他们暂时站着。实际上, 此时我们并未安排好第 1 排。然后依次按上述方法安排第 2 排, 第 3 排, …, 一直安排到第 9 排。这时前 9 排安排的人数不少于 199×9 人。此时剩下的人数(去掉已在前 9 排就坐和站着的)不多于 $1990-199\times 9=199$ 人, 可以安排他们坐第 10 排。最后为了安排好前 9 排, 还必须从每排抽出一个学校, 共 9 个学校。由于 $5\times 39<199$, 可让其中 5 个学校的学生坐第 11 排, 剩下的 4 个学校的学生坐第 12 排, 至此, 我们证明了: 无论何种情况下, 12 排座位能保证按要求使全部学生坐下。

为了说明 12 个横排是最少的, 需要构造出一个特殊情况(实例), 说明 11 排不能按要求安排全部学生, 设想 $n=80$, 由于 $25\times 79+15=1990$, 可设其中 79 个学校各派 25 人, 另一所学校派 15 人。由于 $25\times 7=175<199$, $25\times 8=200>199$, 所以 11 个横排, 除了某排能安排 8 个学校的 $25\times 7+15=190$ 人外, 其余 10 排只能安排 70 个学校, 还有 2 个学校的人

无法安排。

再看一个例子，现行高中教材代数第三册中有这样一道题:

求证 $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

略证: 比较恒等式$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ 两端 x^n 项的系数便可证得等式。

上面的证明方法是证明组合恒等式常用的母函数方法。现迁移这种方法用来产生一个组合不等式试题。考虑到$(1+x)^{2n}$展开式中以 x^n 项的二项系数最大，于是比较恒等式$(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$ 右边 x^n 项与 x^{n-1}项的二项系数便可得下题。

题 19　求证:

$C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}C_n^n\leq(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$。

这是一道形式优美的试题，1984 年笔者将其提供给岳阳市作为竞赛试题。

7. 把某些结论的特例用作新题

数学竞赛中的不少试题源于数学研究。有些本身就是有初等证法的研究结果的照搬，但更多的是著名结论的非平凡特例。

例如著名数学家 Andre Gisona 用一种高深方法得到了如下的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^u}{1+s-x_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^v\leq 1$$

这里 $0\leq x\leq 1$, $u,v\geq 1$, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=s$。

后来加拿大的数学家 M.S.Klamkin 和 Meis 各自独立

地得到了更为简单的证法。于是由 Klamkin 将 Gisona 不等式取 $n=3, u=v=1$ 的特殊情况提供给美国 1980 年数学奥林匹克委员会, 这便是我们今天所见到的题 20。

题 20　若 $0\leq a, b, c\leq 1$, 则

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1$$

证明详见 2.9 节。

再看一个例子。在组合几何中, 有一个著名的 Heilbron 型猜想:“设平面上任给 n 个点, 每两点间有一个距离, 最大距离与最小距离之比记为 λ, 则 $\lambda\geq 2\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$。”这个猜想已被我国数学工作者解决(见《数学通报》1991 年第 5 期和 1992 年第 12 期)且获得了更好的结果。还在 60 年代, 这个猜想的一些特例就被用作竞赛题。如 $n=4$ 时是 1961 年匈牙利竞赛试题; $n=6$ 时是 1964 年波兰竞赛试题; $n=5$ 则是我国 1985 年高中联赛试题。

最近, 我们考虑了 Heilbron 问题的另一形式的特例, 即假定这 n 个点在一条直线上, 我们得到了 λ 的一个非常好的下界, 见题 21。

题 21　假定一条直线上有 n 个点, 其最大距离与最小距离之比 $\lambda\geq\sqrt{\frac{n(n+1)}{6}}$。

证明: 在这条直线上建立线坐标系, 设这 n 个点对应着实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 不失一般性, 可设 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$, 并记 $M=\min\limits_{i<j}(a_i-a_j)^2$, 于是

$$\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\cdots+(a_1-a_n)^2$$

$$
\begin{aligned}
& + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_2 - a_n)^2 + \cdots + \\
& (a_{n-1} - a_n)^2 \\
\geq\ & M^2\{[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + [1^2 + 2^2 \\
& + \cdots + (n-2)^2] + \cdots + 1\} \\
=\ & M^2\{n[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \\
& - [1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3]\} \\
=\ & \frac{n^2(n^2-1)}{2}M
\end{aligned}
$$

故有 $\lambda_n^2 = \dfrac{\max\limits_{i<j}(a_i - a_j)^2}{\min\limits_{i<j}(a_i - a_j)^2} \geq \dfrac{\sum\limits_{i<j}(a_i - a_j)^2}{\binom{n}{2}\min\limits_{i<j}(a_i - a_j)^2} \geq \dfrac{n(n+1)}{6}$

两边开平方便得所证。

这可能是一个层次较高的奥林匹克问题了。